

ALGEBRA LINEAL

Práctica 7: Espacios vectoriales con producto interno

1. Determinar si las siguientes funciones son o no productos internos. En caso afirmativo encontrar su matriz en la base canónica del espacio correspondiente.

(i) $\Phi : K^2 \times K^2 \rightarrow K$

$$\Phi(x, y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1, \text{ con } K = \mathbb{R} \text{ y } K = \mathbb{C}$$

(ii) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$

$$\Phi(x, y) = x_1\bar{y}_1 - ix_1\bar{y}_2 + ix_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2$$

(iii) $\Phi : K^3 \times K^3 \rightarrow K$

$$\Phi(x, y) = 3x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2 + x_1\bar{y}_2 + x_3\bar{y}_3, \text{ con } K = \mathbb{R} \text{ y } K = \mathbb{C}$$

2. (i) Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi(x, y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 6x_2y_2$$

a. Probar que Φ es un producto interno.

b. Encontrar una base de \mathbb{R}^2 que sea ortonormal para Φ .

- (ii) Encontrar una base de \mathbb{C}^2 que sea ortonormal para el producto interno definido en el Ejercicio 1. ii).

3. En cada uno de los siguientes casos, hallar un producto interno en V para el cual la base B resulte ortonormal.

(i) $V = \mathbb{R}^2$ y $B = \{(1, 1), (2, -1)\}$

(ii) $V = \mathbb{C}^2$ y $B = \{(1, i), (-1, i)\}$

(iii) $V = \mathbb{R}^3$ y $B = \{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$

(iv) $V = \mathbb{C}^3$ y $B = \{(1, i, 1), (0, 0, 1), (0, 1, i)\}$

4. Determinar para qué valores de a y b en \mathbb{R} es

$$\Phi(x, y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + bx_2y_2 + (1 + b)x_3y_3$$

un producto interno en \mathbb{R}^3 .

5. Probar que las siguientes funciones definen productos internos sobre los espacios vectoriales considerados:

(i) $\langle \cdot, \cdot \rangle : K^{n \times n} \times K^{n \times n} \rightarrow K$, $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^*)$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

(ii) $\langle \cdot, \cdot \rangle : C[0, 1] \times C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$

- (iii) $\langle, \rangle : K^n \times K^n \rightarrow K$, $\langle x, y \rangle = \bar{y} Q^* Q x^t$ donde $Q \in K^{n \times n}$ es una matriz inversible, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$
6. Restringir el producto interno del item ii) del ejercicio anterior a $\mathbb{R}_n[X]$ y calcular su matriz en la base $B = \{1, X, \dots, X^n\}$.
7. Hallar el complemento ortogonal de los siguientes subespacios de V :
- (i) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle (1, 2, 1) \rangle$
- a. Para el producto interno canónico.
- b. Para el producto interno definido por
- $$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_1 y_2 - x_2 y_1.$$
- (ii) $V = \mathbb{C}^4$, $S = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 / \begin{cases} x_1 + 2ix_2 - x_3 + (1+i)x_4 = 0 \\ x_2 + (2-i)x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$
- para el producto interno $\langle x, y \rangle = x_1 \bar{y}_1 + 2x_2 \bar{y}_2 + x_3 \bar{y}_3 + 3x_4 \bar{y}_4$.
- (iii) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \langle (1, 1, 0, -1), (-1, 1, 1, 0), (2, -1, 1, 1) \rangle$ para el producto interno canónico.
8. (i) Hallar bases ortonormales para los subespacios del ejercicio anterior para cada uno de los productos internos considerados.
- (ii) Definir explícitamente las proyecciones ortogonales sobre cada uno de dichos subespacios.
- (iii) En el caso del item (iii), hallar el punto de S más cercano a $(0, 1, 1, 0)$. Calcular la distancia de $(0, 1, 1, 0)$ a S .
9. (i) Se considera $\mathbb{C}^{3 \times 3}$ con el producto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^*)$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.
- (ii) Se considera $\mathbb{R}_3[X]$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, X, X^2, X^3\}$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S = \langle 1 \rangle$.
- (iii) Se considera $C[-1, 1]$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$. Hallar el polinomio de grado menor o igual que 3 más próximo a la función $f(x) = \text{sen}(\pi x)$.
- Sugerencia: Observar que basta considerar el subespacio $S = \langle 1, x, x^2, x^3, \text{sen}(\pi x) \rangle$.
- (iv) Se considera $C[0, \pi]$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)dt$.
- a. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $B = \{1, \cos t, \text{sen } t\}$.
- b. Sea S el subespacio de $C[0, \pi]$ generado por B . Hallar el elemento de S más próximo a la función $f(x) = x$.
10. Calcular f^* para cada una de las transformaciones lineales siguientes:
- (i) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$

(ii) $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + (1 - i)x_2, x_2 + (3 + 2i)x_3, x_1 + ix_2 + x_3)$

(iii) $B = \{(1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$, $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(iv) $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$, $f(p) = p'$ (donde $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$).

(v) $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ inversible, $f : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$, $f(A) = P^{-1}AP$ (donde $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^*)$).

(vi) $\mu_f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$, $\mu_f(p) = fp$ donde $f \in \mathbb{R}[X]$ y $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$

11. Sea (V, \langle, \rangle) un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Probar que $\text{Im}(f^*) = (\text{Nu}(f))^\perp$.

12. Sea V EVPI, $A : V \rightarrow V$ una transformación lineal autoadjunta. Probar que S subespacio de V invariante para A sii S^\perp lo es.

13. Sea $V \mathbb{C}$ EVPI de dimensión finita, T un operador autoadjunto sobre V . Demostrar que:

(i) $\|v + iT(v)\| = \|v - iT(v)\|$

(ii) $v + iT(v) = w + iT(w) \iff v = w$

(iii) $I + iT, I - iT$ son inversibles.

(iv) Probar que $U = (I + iT)(I - iT)^{-1}$ es un operador unitario.

14. (i) Para cada una de las siguientes matrices, verificar que existe una matriz $O \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal tal que OAO^t sea diagonal y encontrar una:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

(ii) Para cada una de las siguientes matrices, verificar que existe una matriz $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitaria tal que UAU^* sea diagonal y encontrar una:

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & i & 0 \\ 1 & 3 & 2i & 1 \\ -i & -2i & 3 & i \\ 0 & 1 & -i & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

15. Sea $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ simétrica con autovalores 3 y 4 y $(3, 4)$ el autovector asociado a 3. Hallar un autovector asociado a 4. Hallar A y \sqrt{A} .

16. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un CEVPI. Sea T normal. Demostrar que:
- (i) $T = T_1 + iT_2$, donde T_1 y T_2 son dos operadores autoadjuntos que conmutan.
 - (ii) Si T es nilpotente, entonces $T = 0$.
 - (iii) Existe $f \in \mathbb{C}[X]$ tal que $f(T) = T^*$.
17. Sean $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un CEVPI. Sea T un operador en V . Demostrar que si $\langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R} \forall v \in V$, entonces T es autoadjunto.
18. Demostrar que una matriz simétrica real tiene una raíz cúbica simétrica; es decir, si A es simétrica real, existe una simétrica real B tal que $B^3 = A$.
19. Hallar en cada caso una matriz simétrica que verifique:
- (i) $1, 2, -1$ son sus autovalores y tenga algún autovector en $S = \{(x, y, z) : x - y + z = 0\}$.
 - (ii) $-1, -1, 3, 0$ son sus autovalores y que algunos de sus autovectores pertenezcan a $S = \{(x, y, z, w) : 2x - y + z + w = 0; x - y - w = 0\}$