

# ALGEBRA LINEAL - Práctica N°1 - Primer cuatrimestre de 2004

## Espacios Vectoriales

### Ejercicio 1.

- i) Representar gráficamente en el plano los siguientes vectores:  
 $(-1, 1)$ ;  $(2, 3)$ ;  $(-1, 1) + (2, 3)$ ;  $\frac{1}{2} \cdot (-1, 1) + \frac{3}{2} \cdot (2, 3)$
- ii) Sean  $v, w \in \mathbb{R}^2$ . Interpretar geoméricamente  $-v$ ,  $3.v$ ,  $\frac{1}{3}.v$ ,  $v + w$ ,  $v - w$ .
- iii) Sean  $v = (3, 1)$ ,  $w = (2, 4) \in \mathbb{R}^2$ . Representar gráficamente los conjuntos:

$$S_1 = \{r.v / r \in \mathbb{R}\}$$

$$S_2 = \{r.v / r \in \mathbb{R}_{\geq 1}\}$$

$$S_3 = \{r.v + s.w / r, s \in \mathbb{R}\}$$

$$S_4 = \{r.v + s.w / r, s \in \mathbb{R}, 0 \leq r, s \leq 1\}$$

$$S_5 = \{r.v + s.w / r, s \in \mathbb{R}, 0 \leq r, s \leq 1, r + s = 1\}$$

**Ejercicio 2.** Probar en cada caso que el conjunto  $V$  con la suma y el producto por escalares definidos es un espacio vectorial sobre  $K$ .

- i)  $V = K^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) / a_i \in K \forall i \in \mathbb{N}\}$ , el conjunto de todas las sucesiones de elementos de  $K$  (donde  $K$  es un cuerpo cualquiera).
- $$+ : (a_i)_{i \in \mathbb{N}} + (b_i)_{i \in \mathbb{N}} = (a_i + b_i)_{i \in \mathbb{N}}$$
- $$\cdot : k.(a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (k.a_i)_{i \in \mathbb{N}}$$
- ii)  $X$  es un conjunto,  $V = \mathcal{P}(X)$ ,  $K = \mathbb{Z}_2$ .
- $$+ : B + C = B \triangle C$$
- $$\cdot : 0.B = \emptyset, \quad 1.B = B$$
- iii)  $V = \mathbb{R}_{>0}$ ,  $K = \mathbb{Q}$ .
- $$\oplus : a \oplus b = a.b$$
- $$\otimes : \frac{m}{n} \otimes a = \sqrt[n]{a^m}$$

**Ejercicio 3.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $K$ ,  $k \in K$ ,  $v \in V$ . Probar las siguientes afirmaciones:

- i)  $0.v = \vec{0}$
- ii)  $k.\vec{0} = \vec{0}$
- iii)  $(-1).v = -v$
- iv)  $-(-v) = v$
- v)  $k.v = \vec{0} \Rightarrow k = 0 \text{ ó } v = \vec{0}$
- vi)  $-\vec{0} = \vec{0}$

**Ejercicio 4.**

- i) Sea  $v \in \mathbb{R}^2$  un vector fijo. Se define la función  $f_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de la siguiente forma:

$$f_v(x, y) = (x, y) + v$$

Interpretar geoméricamente el efecto de  $f_v$  sobre el plano ( $f_v$  se llama la *traslación en v*).

- ii) Probar que  $\mathbb{R}^2$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial con la suma  $+(2,1)$  y el producto por escalares  $\cdot(2,1)$  definidos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(x, y) +_{(2,1)} (x', y') &= (x + x' - 2, y + y' - 1) \\ r \cdot_{(2,1)} (x, y) &= r \cdot (x - 2, y - 1) + (2, 1)\end{aligned}$$

(Este espacio se notará  $\mathbb{R}_{(2,1)}^2$  para distinguirlo de  $\mathbb{R}^2$  con la suma y el producto usual. La notación se basa en que el  $(2, 1)$  resulta el neutro de la suma  $+(2,1)$ ).

- iii) Interpretar geoméricamente  $+(2,1)$  y  $\cdot(2,1)$ , teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}(x, y) +_{(2,1)} (x', y') &= f_{(2,1)}(f_{(-2,-1)}(x, y) + f_{(-2,-1)}(x', y')) \\ r \cdot_{(2,1)} (x, y) &= f_{(2,1)}(r \cdot f_{(-2,-1)}(x, y))\end{aligned}$$

**Ejercicio 5.** Sea  $S = \{f \in \mathbb{R}[X] / f(1) = f(2)\}$ .

- i) Verificar que la suma usual de polinomios es una operación en  $S$  (es decir:  $f, g \in S \Rightarrow f+g \in S$ )
- ii) Verificar que el producto usual de un número real por un polinomio es una acción de  $\mathbb{R}$  en  $S$  (es decir:  $r \in \mathbb{R}, f \in S \Rightarrow r \cdot f \in S$ )
- iii) Probar que  $(S, +, \cdot)$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial. (Si se minimiza el trabajo sólo deberá verificarse una propiedad para esto. Comparar i), ii) y iii) con el criterio para decidir si un subconjunto es un subespacio.)

**Ejercicio 6.** Caracterizar geoméricamente todos los subespacios de  $\mathbb{R}^2$ .**Ejercicio 7.**

- i) Encontrar un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}^2$  que sea cerrado para la suma y para la resta pero no para la multiplicación por escalares.
- ii) Encontrar un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}^2$  que sea cerrado para la multiplicación por escalares pero no para la suma.

**Ejercicio 8.** Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios de  $V$  como  $K$ -espacio vectorial:

- i)  $S_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 / v = a \cdot (1, 0, 0) + b \cdot (1, 1, 1); a, b \in \mathbb{R}\}$   $V = \mathbb{R}^3$   $K = \mathbb{R}$
- ii) Sean  $\{a_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq 3} \in \mathbb{R}$  fijos.

$$S_2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = 0 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = 0 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = 0 \end{cases} \right\} \quad V = \mathbb{R}^3 \quad K = \mathbb{R}$$

- iii)  $S_3 = \{a.i / a \in \mathbb{R}\} \quad V = \mathbb{C} \quad K = \mathbb{R} \text{ ó } K = \mathbb{C}$
- iv)  $S_4 = \{f \in K[X] / f'(1) = 0\} \quad V = K[X]$
- v)  $S_5 = \{f \in K[X] / f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \geq 2\} \quad V = K[X]$
- vi)  $S_6 = \{f \in K[X] / f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \leq 5\} \quad V = K[X]$
- vii)  $S_7 = \{M \in K^{n \times n} / M^t = -M\} \quad V = K^{n \times n}$
- viii)  $S_8 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) / f'' + 3f' = 0\} \quad V = C^\infty(\mathbb{R}) \quad K = \mathbb{R}$
- ix)  $S_9 = \{v \in \mathbb{R}_{(2,1)}^2 / x + y = 3\} \quad V = \mathbb{R}_{(2,1)}^2 \quad K = \mathbb{R}$
- x)  $S_{10} = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in K^\mathbb{N} / a_1 = 0\} \quad V = K^\mathbb{N}$
- xi)  $S_{11} = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in K^\mathbb{N} / \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_r = 0 \forall r \geq k\} \quad V = K^\mathbb{N}$
- xii)  $S_{12} = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in K^\mathbb{N} / a_1.a_2 = 0\} \quad V = K^\mathbb{N}$

**Ejercicio 9.**

- i) Encontrar subespacios  $S$  y  $T$  de  $\mathbb{R}^2$  tales que  $S \cup T$  no sea subespacio.
- ii) Sean  $S$  y  $T$  subespacios de un  $K$ -espacio vectorial  $V$ . Probar que  $S \cup T$  es un subespacio de  $V \iff S \subseteq T \text{ ó } T \subseteq S$ .

**Ejercicio 10.** Encontrar un sistema de generadores para los siguientes  $K$ -espacios vectoriales:

- i)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}, \quad K = \mathbb{R}$
- ii)  $K^n$
- iii)  $K_n[X] = \{f \in K[X] / f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \leq n\}$
- iv)  $K[X]$
- v)  $K^{n \times n}$
- vi)  $\mathbb{C}^{n \times n}, \quad K = \mathbb{R}$
- vii)  $\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \quad K = \mathbb{Z}_2$

**Ejercicio 11.** Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.

- i) Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial y sean  $v, w \in V, k \in K$ .  
Entonces  $\langle v, w \rangle = \langle v, w + k.v \rangle$ .
- ii) Sean  $v_1, v_2, v_3, v_4, w \in \mathbb{R}^7$  tales que  $\langle v_1, v_2, w \rangle = \langle v_3, v_4, w \rangle$ .  
Entonces  $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_3, v_4 \rangle$ .
- iii) Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial y sean  $v_1, \dots, v_n, w \in V$ .  
 $\langle v_1, \dots, v_n, w \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle \iff w \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

**Ejercicio 12.** Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales ( $K = \mathbb{R}$ ).

$$\text{i)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2 \end{cases}$$

$$\text{iii)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 &= 0 \end{cases}$$

$$\text{iv)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 &= 6 \end{cases}$$

¿Cambia algo si  $K = \mathbb{Q}$ ? ¿Y si  $K = \mathbb{C}$ ?

**Ejercicio 13.**

i) Resolver los siguientes sistemas y comparar los conjuntos de soluciones ( $K = \mathbb{R}$ ).

$$\text{a)} \quad \{x + 2y - 3z = 4 \quad \text{b)} \quad \begin{cases} x + 2y - 3z &= 4 \\ x + 3y + z &= 11 \end{cases} \quad \text{c)} \quad \begin{cases} x + 2y - 3z &= 4 \\ x + 3y + z &= 11 \\ 2x + 5y - 4z &= 13 \end{cases}$$

ii) Interpretar geoméricamente los conjuntos de soluciones obtenidos.

**Ejercicio 14.** Resolver los siguientes sistemas no homogéneos. Considerar en cada uno de ellos el sistema homogéneo asociado ( $A \cdot x = 0$ ).

$$\text{i)} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 1 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 4 \end{cases}$$

$$\text{iii)} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1 \end{cases}$$

$$\text{iv)} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 &= \alpha \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= \beta \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= \gamma \end{cases} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

**Ejercicio 15.** Dado el sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 &= \alpha_1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 &= \alpha_2 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= \alpha_3 \end{cases}$$

Determinar los valores de  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  para los cuales el sistema admite solución.

**Ejercicio 16.** Resolver según los valores de  $a$  y  $b$  en  $\mathbb{R}$

$$\text{i)} \quad \begin{cases} (5-a)x_1 - 2x_2 - x_3 &= 1 \\ -2x_1 + (2-a)x_2 - 2x_3 &= 2 \\ -x_1 - 2x_2 + (5-a)x_3 &= b \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= a^2 \end{cases}$$

**Ejercicio 17.** Determinar todos los  $k \in \mathbb{R}$  para que cada uno de los siguientes sistemas tenga solución única.

$$\text{i) } \begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + kx_2 + kx_3 & = & 0 \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} x_1 + (k-1)x_2 & = & 0 \\ x_1 + (3k-4)x_2 + kx_3 & = & 0 \\ x_1 + (k-1)x_2 + \frac{k}{2}x_3 & = & 0 \end{cases}$$

**Ejercicio 18.** Determinar los números reales  $k$  para los cuales el sistema

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 & = & 0 \\ x_1 + kx_2 & = & 0 \\ k^3x_1 + x_2 + k^3x_3 + kx_4 & = & 0 \\ x_1 + k^2x_2 + kx_3 + kx_4 & = & 0 \end{cases}$$

tiene alguna solución no trivial y, para esos  $k$ , resolverlo.

**Ejercicio 19.** Determinar para qué valores de  $k \in \mathbb{R}$  cada uno de los siguientes sistemas tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones.

$$\text{i) } \begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 & = & 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 & = & -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 & = & 2 \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} kx_1 + 2x_2 + kx_3 & = & 1 \\ kx_1 + (k+4)x_2 + 3kx_3 & = & -2 \\ -kx_1 - 2x_2 + x_3 & = & 1 \\ (k+2)x_2 + (3k+1)x_3 & = & -1 \end{cases}$$

**Ejercicio 20.**

i) Resolver el siguiente sistema en  $\mathbb{C}^2$ :

$$\begin{cases} (1-i)x_1 - ix_2 & = & 0 \\ 2x_1 + (1-i)x_2 & = & 0 \end{cases}$$

ii) Resolver en  $\mathbb{C}^3$  el sistema  $A.x = 0$  donde

$$A = \begin{pmatrix} i & -(1+i) & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2i & -1 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 21.** Resolver los siguientes sistemas:

i) en  $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 4 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 & = & 2 \\ 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = & 1 \end{cases}$$

ii) en  $\mathbb{Z}_7$

$$\begin{cases} x + z & = & 2 \\ 2y + z & = & 6 \\ x + 3y & = & 0 \end{cases}$$

iii) en  $\mathbb{Z}_3$

$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ 2x + y + 2z &= 0 \\ x + z &= 2 \end{cases}$$

**Ejercicio 22.** Encontrar un sistema a coeficientes reales cuya solución general sea:

$$(1, 1, 0) + \lambda(1, 2, 1) \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

**Ejercicio 23.** Sean  $A \in K^{m \times n}$ ,  $b \in K^{m \times 1}$ .

- i) Si el sistema  $A.x = 0$  tiene solución única, probar que el sistema  $A.x = b$  tiene a lo sumo una solución. Dar ejemplos de los distintos casos que se puedan presentar.
- ii) ¿Vale la recíproca de i)?

**Ejercicio 24.** Encontrar un sistema de generadores para cada uno de los siguientes espacios vectoriales sobre  $K$ :

- i)  $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0 ; x - y = 0\}$ ,  $K = \mathbb{R}$
- ii)  $S_2 = \left\{ (x, y, z) \in (\mathbb{Z}_7)^3 / \begin{cases} x + z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \right\}$ ,  $K = \mathbb{Z}_7$
- iii)  $S_3 = \{A \in \mathbb{Q}^{3 \times 3} / A = -A^t\}$ ,  $K = \mathbb{Q}$
- iv)  $S_4 = \{f \in \mathbb{R}_4[X] / f(1) = 0 \text{ y } f(2) = f(3)\}$ ,  $K = \mathbb{R}$
- v)  $S_5 = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / a_i = 0 \forall i \geq 5 ; a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 ; a_2 + a_4 = 0\}$ ,  $K = \mathbb{R}$
- vi)  $S_6 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) / f''' = 0\}$ ,  $K = \mathbb{R}$

**Ejercicio 25.** Sea  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y sean  $v_1, v_2, v_3 \in V$ . Probar que si  $v_1 + 3v_2 - v_3 = 0 = 2v_1 - v_2 - v_3$  entonces  $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_3 \rangle$ .

**Ejercicio 26.** Determinar si  $v \in S$  en cada uno de los siguientes casos:

- i)  $v = (1, 2, -1)$ ,  $S = \langle (1, 3, 2), (2, 0, 1), (1, 1, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$
- ii)  $v = (1, 0, -1, 3)$ ,  $S = \langle (1, 0, 1, 0), (2, 1, 0, 1), (0, 1, 0, -2) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$

**Ejercicio 27.** Sea  $S = \langle (1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ .

- i) Determinar si  $(2, 1, 3, 5) \in S$ .
- ii) Determinar si  $\{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$ .
- iii) Determinar si  $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ .

**Ejercicio 28.** Hallar un sistema de generadores para  $S \cap T$  como subespacio de  $V$  en cada uno de los siguientes casos:

- i)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $S = \{(x, y, z) / 3x - 2y + z = 0\}$   $T = \{(x, y, z) / x + z = 0\}$
- ii)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $S = \{(x, y, z) / 3x - 2y + z = 0\}$   $T = \langle (1, 1, 0), (5, 7, 3) \rangle$
- iii)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $S = \langle (1, 1, 3), (1, 3, 5), (6, 12, 24) \rangle$   $T = \langle (1, 1, 0), (3, 2, 1) \rangle$
- iv)  $V = \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $S = \{(x_{ij}) / x_{ij} = x_{ji} \forall i, j\}$   $T = \{(x_{ij}) / x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0\}$
- v)  $V = \mathbb{R}[X]$ ,  $S = \{f \in \mathbb{R}[X] / f(1) = 0\}$   $T = \langle 1, X, X^2, X^3 + 2X^2 - X, X^5 \rangle$
- vi)  $V = \mathbb{R}[X]$ ,  $S = \{f \in \mathbb{R}[X] / f(1) = 0\}$   $T = \{f \in \mathbb{R}[X] / f'(1) = f''(1) = 0\}$

**Ejercicio 29.** Decidir si las siguientes sucesiones de vectores son linealmente independientes sobre  $K$ .

- i)  $(1 - X)^3, (1 - X)^2, 1 - X, 1$  en  $K[X]$
- ii)  $(1, 2, 3), (2, 3, 1), (1, 1, 4), (5, 1, 1)$  en  $\mathbb{R}^3$
- iii)  $(1, 4, -1, 3), (2, 1, -3, -1), (0, 2, 1, -5)$  en  $\mathbb{Q}^4$
- iv)  $(1 - i, i), (2, -1 + i)$  en  $\mathbb{C}^2$ , para  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$
- v)  $(3 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}), (7, 1 + 2\sqrt{2})$  en  $\mathbb{R}^2$ , para  $K = \mathbb{Q}$  y  $K = \mathbb{R}$
- vi)  $f(x) = 1, g(x) = x$  en  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
- vii)  $f(x) = \sin(x), g(x) = \cos(x)$  en  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
- viii)  $f(x) = e^x, g(x) = x$  en  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
- ix)  $u = (1, 0, 1, 0, 1, \dots), v = (0, 1, 0, 1, 0, \dots), w = (1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots)$  en  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

**Ejercicio 30.** Hallar todos los  $k \in \mathbb{R}$  para los cuales  $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$  es un conjunto linealmente independiente en los siguientes casos:

- i)  $\{(1, 2, k), (1, 1, 1), (0, 1, 1 - k)\} \subset \mathbb{R}^3$
- ii)  $\{(k, 1, 0), (3, -1, 2), (k, 2, -2)\} \subset \mathbb{R}^3$
- iii)  $\{k \cdot X^2 + X, X^2 - k, k^2 \cdot X\} \subset \mathbb{R}[X]$
- iv)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$

**Ejercicio 31.** Sean  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ . Probar que  $\{v_1, \dots, v_n\}$  son linealmente independientes sobre  $\mathbb{R} \iff \{v_1, \dots, v_n\}$  son linealmente independientes sobre  $\mathbb{C}$ .

**Ejercicio 32.** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial. Probar:

i)  $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\} \subseteq V$  son l. i.  $\iff \{v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n\} \subseteq V$  son l. i.

ii)  $\lambda \in K, \lambda \neq 0$

$\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_n\} \subseteq V$  son l. i.  $\iff \{v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n\} \subseteq V$  son l. i.

iii)  $\lambda \in K$

$\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\} \subseteq V$  son l. i.  $\iff \{v_1, \dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j, \dots, v_n\} \subseteq V$  son l. i.

Notar que i), ii) y iii) justifica el “método de triangulación” para analizar la dependencia o independencia lineal de vectores en  $K^n$ .

**Ejercicio 33.** En cada uno de los siguientes casos hallar una base del subespacio de soluciones del sistema lineal homogéneo  $A \cdot x = 0$  ( $K = \mathbb{R}$ ).

i)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$     ii)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$     iii)  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

**Ejercicio 34.** Completar los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del  $K$ -espacio vectorial  $V$  indicado.

i)  $\{(1, 1, 1, 1), (0, 2, 1, 1)\}, V = \mathbb{R}^4, K = \mathbb{R}$

ii)  $\{X^3 - 2X + 1, X^3 + 3X\}, V = \mathbb{R}_3[X], K = \mathbb{R}$

iii)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, V = \mathbb{C}^{2 \times 2}, K = \mathbb{R} \text{ y } K = \mathbb{C}$

**Ejercicio 35.** Extraer una base de  $S$  de cada uno de los siguientes sistemas de generadores.

i)  $S = \langle (1, 1, 2), (1, 3, 5), (1, 1, 4), (5, 1, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3, K = \mathbb{R}$

ii)  $S = \langle X^2 + 2X + 1, X^2 + 3X + 1, X + 2 \rangle \subseteq \mathbb{R}[X], K = \mathbb{R}$

iii)  $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^{2 \times 2}, K = \mathbb{R} \text{ y } K = \mathbb{C}$

**Ejercicio 36.**

i) Sea  $B = \{f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\}$ , donde cada  $f_i$  es un polinomio de grado exactamente  $i$ . Probar que  $B$  es una base de  $K[X]$ .

ii) ¿Es  $\{(1, 0, 0, 0, 0, \dots); (0, 1, 0, 0, 0, \dots); (0, 0, 1, 0, 0, \dots); (0, 0, 0, 1, 0, \dots); \dots\}$  una base de  $K^{\mathbb{N}}$ ?

**Ejercicio 37.** Hallar una base y la dimensión de los siguientes  $K$ -espacios vectoriales:

i)  $\langle (1, 4, -2, 1), (1, -3, -1, 2), (3, -8, -2, 7) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4, K = \mathbb{R}$

$$\text{ii) } \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{Q}^{2 \times 2}, \quad K = \mathbb{Q}$$

$$\text{iii) } \mathbb{C}, \quad K = \mathbb{R} \text{ y } K = \mathbb{C}$$

$$\text{iv) } \{f \in \mathbb{R}[X] / f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \leq 3 \text{ y } f(2) = f(-1)\}, \quad K = \mathbb{R}$$

$$\text{v) } \mathcal{P}(\{a, b, c\}), \quad K = \mathbb{Z}_2$$

$$\text{vi) } \{f \in \mathbb{Q}[X] / f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \leq 3 \text{ y } (x^2 - 2) \mid f\}, \quad K = \mathbb{Q}$$

$$\text{vii) } \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} / a_i = a_j \quad \forall i, j\}$$

**Ejercicio 38.** Hallar la dimensión del  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial  $S$  para cada  $k \in \mathbb{R}$  en los siguientes casos:

$$\text{i) } S = \langle (1, k, 1), (-1, k, 1), (0, 1, k) \rangle$$

$$\text{ii) } S = \{x \in \mathbb{R}^3 / A.x = 0\} \text{ siendo } A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 39.** Hallar todos los  $b \in \mathbb{R}$  para los cuales el  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de soluciones del sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 + (b-6)x_2 + 5bx_3 & = & 0 \\ x_1 + (b-2)x_2 + (b^2+4b)x_3 & = & 0 \\ x_1 - 2x_2 + bx_3 & = & 0 \end{cases}$$

$$\text{i) } \text{tenga dimensión } 1.$$

$$\text{ii) } \text{tenga dimensión } 2.$$

**Ejercicio 40.** Sean  $S$  y  $T$  los subespacios de  $\mathbb{R}^4$

$$S = \langle (1, 2, 1, 0), (2, 1, 0, 1) \rangle \quad \text{y} \quad T = \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0\}.$$

Hallar un subespacio  $U$  de  $\mathbb{R}^4$  tal que  $\dim U = 2$  y  $S \cap T \subset U \subset T$ .

**Ejercicio 41.** Determinar todos los  $k \in \mathbb{R}$  para los cuales

$$\langle (-2, 1, 6), (3, 0, -8) \rangle = \langle (1, k, 2k), (-1, -1, k^2 - 2), (1, 1, k) \rangle.$$

(\*) **Ejercicio 42.** Se considera el  $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial  $V \subset \mathbb{R}$  generado por  $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$ .

$$\text{i) } \text{Utilizando un argumento de dimensión probar que existe un polinomio } f \in \mathbb{Q}[X] \text{ con } \text{gr}(f) \leq 4 \text{ que se anula en el punto } \psi = \sqrt{2} + \sqrt{3}. \text{ Hallar un tal } f.$$

$$\text{ii) } \text{Calcular } \dim_{\mathbb{Q}} V.$$

**Ejercicio 43.** En cada uno de los siguientes casos caracterizar  $S + T \subseteq V$  y determinar si la suma es directa.

- i)  $V = K^{n \times n}$ ,  $S = \{A \in K^{n \times n} / A_{ij} = A_{ji} \forall i, j\}$ ,  $T = \{A \in K^{n \times n} / A_{ij} = -A_{ji} \forall i, j\}$
- ii)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $S = \langle (1, 1, 1) \rangle$ ,  $T = \langle (2, -1, 1), (3, 0, 2) \rangle$
- iii)  $V = \mathbb{R}[X]$ ,  $S = \{f \in \mathbb{R}[X] / f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \leq 3\}$ ,  $T = \{f \in \mathbb{R}[X] / \text{mult}(4, f) \geq 4\}$
- iv)  $V = \mathbb{R}^{2 \times 3}$ ,  $S = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 3} / A_{11} + A_{21} = 0, 3A_{22} - 2A_{11} = A_{13} + A_{23}\}$ ,  
 $T = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

**Ejercicio 44.** Determinar todos los  $k \in \mathbb{R}$  para los cuales  $S \cap T = \langle (0, 1, 1) \rangle$ , siendo

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 - x_3 = 0\} \quad \text{y} \quad T = \langle (1, k, 2), (-1, 2, k) \rangle.$$

**Ejercicio 45.** Para cada  $S$  dado hallar  $T \subseteq V$  tal que  $S \oplus T = V$  (en este caso  $T$  se dice un *suplemento* de  $S$  con respecto a  $V$ ).

- i)  $S = \langle (1, 2, -1, 3), (2, 3, -2, 1), (0, 1, 0, 7) \rangle$ ,  $V = \mathbb{R}^4$
- ii)  $S = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} / \text{tr}(A) = 0\}$ ,  $V = \mathbb{R}^{n \times n}$
- iii)  $S = \langle 3, 1 + X^2 \rangle$ ,  $V = \mathbb{R}_4[X]$

**Ejercicio 46.** Dado  $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 + 2x_4 = 0, x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ , hallar dos vectores  $v_3, v_4$  de  $\mathbb{R}^4$  tales que para toda elección de una base  $\{v_1, v_2\}$  de  $S$ ,  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  sea una base de  $\mathbb{R}^4$ .

**Ejercicio 47.** Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

- i)  $S, T$  subespacios de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\dim S = \dim T = 2 \Rightarrow \exists v \neq 0$  tal que  $v \in S \cap T$ .
- ii)  $S, T, W$  subespacios de  $\mathbb{R}^{11}$ ,  $\dim S = \dim T = \dim W = 4 \Rightarrow \dim(S \cap T \cap W) \geq 1$ .

**Ejercicio 48.** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial y sean  $S, T$  y  $U$  subespacios de  $V$ .

- i) Probar que  $(S \cap T) + (S \cap U) \subseteq S \cap (T + U)$ .
- ii) Mostrar que, en general, la inclusión anterior es estricta.
- iii) Probar que, si  $U \subseteq S$ , entonces vale la igualdad en i).

**Ejercicio 49.** Sean  $S, T$  y  $U$  subespacios de un  $K$ -espacio vectorial  $V$  tales que

- i)  $S \cap T = S \cap U$
- ii)  $S + T = S + U$
- iii)  $T \subseteq U$

Probar que  $T = U$ .

**Ejercicio 50.** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  y sea  $T$  un hiperplano de  $V$  (es decir, un subespacio de dimensión  $n - 1$ ).

- i) Probar que  $\forall v \notin T, T \oplus \langle v \rangle = V$ .
- ii) Si  $S$  es un subespacio de  $V$  tal que  $S \not\subseteq T$ , probar que  $S + T = V$ . Calcular  $\dim(S \cap T)$ .
- iii) Si  $S$  y  $T$  son dos hiperplanos distintos, deducir  $\dim(S \cap T)$ .

**Ejercicio 51.** Sea  $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .

- i) Sean  $S = \{f \in V / f(x) = f(-x) \ \forall x \in \mathbb{R}\}$  y  $T = \{f \in V / f(-x) = -f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}\}$  ( $S$  es el conjunto de funciones pares y  $T$  el conjunto de funciones impares). Probar que  $S$  y  $T$  son subespacios de  $V$  y que  $S \oplus T = V$ .
- ii) Sean  $U = \{f \in V / f(0) = 0\}$  y  $W = \{f \in V / f \text{ es constante}\}$ . Probar que  $U$  y  $W$  son subespacios de  $V$  y que  $U \oplus W = V$ .

**(\*) Ejercicio 52.**

- i) Sea  $S = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \ \forall n \in \mathbb{N}\}$ . Probar que  $S$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Calcular su dimensión.
- ii) Encontrar una base de  $S$  formada por sucesiones  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , verifiquen  $u_n = u^{n-1}$  para algún  $u \in \mathbb{R}$ .
- iii) Usando ii), encontrar una fórmula para el término general de la sucesión de Fibonacci:

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$