ALGEBRA LINEAL - Práctica N°3 - Primer cuatrimestre de 2004

Transformaciones lineales

Ejercicio 1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales.

i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - 3.x_1 + \sqrt{2}.x_3\ ,\ x_1 - \frac{1}{2}.x_2)$

ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2\ ,\ 2.x_2\ ,\ 1 + x_1)$

iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x_1, x_2, x_3) = (2.x_1 - 7.x_3\ ,\ 0\ ,\ 3.x_2 + 2.x_3)$

iv) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2\ ,\ |x_1|)$

v) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,\ f(z) = i.z$ (considerando a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial)

vi) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,\ f(z) = i.Im(z)$ (considerando a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial)

vii) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,\ f(z) = \overline{z}$ (considerando a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial)

viii) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}\,,\ f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

ix) $f : \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^3,\ f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = (3.a_{13} - a_{23}\ ,\ a_{11} + 2.a_{22} - a_{23}\ ,\ a_{22} - a_{12})$

x) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 3},\ f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$

xi) $f : \mathbb{C}^{2\times 2} \to \mathbb{C}^{2\times 2},\ f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \overline{a_{12}} \\ \overline{a_{21}} & a_{22} \end{pmatrix}$ (considerando a $\mathbb{C}^{2\times 2}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial)

Ejercicio 2. Interpretar geométricamente las siguientes aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

i) $f(x, y) = (x, 0)$

ii) $f(x, y) = (0, y)$

iii) $f(x, y) = (x, -y)$

iv) $f(x, y) = (\frac{1}{2}.(x + y), \frac{1}{2}.(x + y))$

v) $f(x, y) = (x.\cos t - y.\text{sen}\, t\ ,\ x.\text{sen}\, t + y.\cos t)$

Ejercicio 3.

i) Encontrar una función $f : V \to V$ (para un K-espacio vectorial V conveniente) que cumpla $f(v + w) = f(v) + f(w)$ para cualquier par de vectores $v\,,\ w\ \in V$ pero que no sea una transformación lineal.

ii) Encontrar una función $f : V \to V$ (para un K-espacio vectorial V conveniente) que cumpla $f(k.v) = k.f(v)$ para cualquier escalar $k \in K$ y cualquier vector $v \in V$ pero que no sea una transformación lineal.

Ejercicio 4. Probar la linealidad de las siguientes aplicaciones:

i) $tr : K^{n\times n} \to K$

ii) $t : K^{n\times m} \to K^{m\times n},\ t(A) = A^t$

iii) $f : K^{n\times m} \to K^{r\times m},\ f(A) = B.A$ donde $B \in K^{r\times n}$

iv) $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}),\ \delta(f) = f'$

v) $\epsilon_\alpha : K[X] \to K,\ \epsilon_\alpha(f) = f(\alpha)$ donde $\alpha \in K$

vi) $s : K^{\mathbb{N}} \to K^{\mathbb{N}},\ s(\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}) = (0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$

Ejercicio 5.

i) Probar que existe una única transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (-5, 3)$ y $f(-1, 1) = (5, 2)$. Para dicha f, determinar $f(5, 3)$ y $f(-1, 2)$.

ii) ¿Existirá una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (2, 6)$; $f(-1, 1) = (2, 1)$ y $f(2, 7) = (5, 3)$?

iii) Sean f, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que

$$\begin{array}{lll} f(1,0,1) = (1,2,1), & f(2,1,0) = (2,1,0), & f(-1,0,0) = (1,2,1), \\ g(1,1,1) = (1,1,0), & g(3,2,1) = (0,0,1), & g(2,2,-1) = (3,-1,2). \end{array}$$

Determinar si $f = g$.

iv) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales exista una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga que $f(1, -1, 1) = (2, a, -1)$, $f(1, -1, 2) = (a^2, -1, 1)$ y $f(1, -1, -2) = (5, -1, -7)$.

v) Hallar una fórmula para todas las tranformaciones lineales $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3$ que satisfacen $f(X^3+2X^2-X+4) = (6, 5, 3)$, $f(3X^2+2X-5) = (0, 0, -3)$, $f(X^3-2X^2+3X-2) = (0, -1, 1)$ y $f(2X^3 - 3X^2 + 7) = (6, 4, 7)$.

Ejercicio 6.

i) Calcular bases del núcleo y de la imagen para cada tranformación lineal del ejercicio 1. Decidir, en cada caso, si f es epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular f^{-1}.

ii) Clasificar las transformaciones lineales tr , t , δ , ϵ_α y s del ejercicio 4 en epimorfismos, monomorfismos e isomorfismos.

Ejercicio 7. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2,\, x_1 + x_3, 0, 0)$ y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2,\, 2x_1 - x_2)$. Calcular el núcleo y la imagen de f, de g y de $g \circ f$. Decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

Ejercicio 8. Sean $g : V \to V'$ y $f : V' \to V''$ transformaciones lineales. Probar:

i) $\mathrm{Nu}(g) \subseteq \mathrm{Nu}(f \circ g)$.

ii) Si $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$, entonces $\mathrm{Nu}(g) = \mathrm{Nu}(f \circ g)$.

iii) $\mathrm{Im}(f \circ g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$.

iv) Si $\mathrm{Im}(g) = V'$, entonces $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f)$.

Ejercicio 9.

i) Sean S, $T \subset \mathbb{R}^4$ definidos por
$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\,/\, 2.x_1 + x_4 = 0\,,\, x_2 - x_3 = 0\}$.
¿Existirá algún isomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(S) = T$?

ii) ¿Existirá algún monomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$?

iii) ¿Existirá algún epimorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$?

iv) Sean $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1, 0)$ y $v_3 = (1, 1, 1, 1)$. ¿Existirá alguna transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathrm{Im}(f)$?

Ejercicio 10. Determinar si existe (y en caso afirmativo hallar) una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que verifique $\mathrm{Im}(f) = S$ y $\mathrm{Nu}(f) = T$ en los siguientes casos:

i) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 + x_2 - x_3 + 2.x_4 = 0\}$, $T = <(1, 2, 1)>$

ii) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 + x_2 = 0,\, x_3 + x_4 = 0\}$, $T = <(1, -2, 1)>$

Ejercicio 11. En cada uno de los siguientes casos encontrar una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifique lo pedido:

i) $(1, 1, 0) \in \mathrm{Nu}(f)$ y $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$

ii) $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = <(1, 1, 2)>$

iii) $f \neq 0$ y $\mathrm{Nu}(f) \subseteq \mathrm{Im}(f)$

iv) $f \neq 0$ y $f \circ f = 0$

v) $f \neq Id$ y $f \circ f = Id$

vi) $\mathrm{Nu}(f) \neq \{0\}$, $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$ y $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$

Ejercicio 12. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Se define la aplicación $\alpha_B : V \to K^n$ de la siguiente manera:

$$\text{Si } v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i\,, \quad \alpha_B(v) = (x_1, \dots, x_n).$$

Probar que α_B es un isomorfismo.

Observar que, teniendo en cuenta que la aplicación α_B es tomar coordenadas en la base B, esto nos permite trabajar con coordenadas en una base en el siguiente sentido:

i) $\{w_1, \dots, w_s\}$ es linealmente independiente en $V \iff \{\alpha_B(w_1), \dots, \alpha_B(w_s)\}$ es linealmente independiente en K^n.

ii) $\{w_1, \dots, w_r\}$ es un sistema de generadores de $V \iff \{\alpha_B(w_1), \dots, \alpha_B(w_r)\}$ es un sistema de generadores de K^n.

iii) $\{w_1, \dots, w_n\}$ es una base de $V \iff \{\alpha_B(w_1), \dots, \alpha_B(w_n)\}$ es una base de K^n.

Por ejemplo, para decidir si $\{X^2 - X + 1,\ X^2 - 3.X + 5,\ 2.X^2 + 2.X - 3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[X]$, bastará ver si $\{(1, -1, 1),\ (1, -3, 5),\ (2, 2, -3)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ para lo que se puede usar el método de triangulación.

Rehacer los items ii) y iii) de los ejercicios 34 y 35 de la práctica N°1 utilizando coordenadas.

Ejercicio 13. Sea V un K-espacio vectorial y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Probar que $f \circ f = f \iff f(v) = v \;\; \forall\, v \in \operatorname{Im}(f)$.

Una transformación lineal que cumple esto se llama *proyector*.

Ejercicio 14. En cada uno de los siguientes casos construir un proyector $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla:

i) $\operatorname{Im}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

ii) $\operatorname{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

iii) $\operatorname{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / 3.x_1 - x_3 = 0\}$ e $\operatorname{Im}(f) = <(1, 1, 1)>$

Ejercicio 15. Sea V un K-espacio vectorial y sea $f : V \to V$ un proyector. Probar:

i) $V = \operatorname{Nu}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$

ii) $g = id_V - f$ es un proyector con $\operatorname{Im}(g) = \operatorname{Nu}(f)$ y $\operatorname{Nu}(g) = \operatorname{Im}(f)$

Ejercicio 16. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sean S y T subespacios de V tales que $V = S \oplus T$. Probar que existe un único proyector $f : V \to V$ tal que $\operatorname{Nu}(f) = S$ e $\operatorname{Im}(f) = T$.

Ejercicio 17. Sea V un K-espacio vectorial y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Se dice que f es *nilpotente* si $\exists\, s \in \mathbb{N} \,/\, f^s = 0$.

i) Probar que si f es nilpotente, entonces f no es ni monomorfismo ni epimorfismo.

ii) Si V es de dimensión n probar que f es nilpotente $\iff f^n = 0$.

(Sugerencia: considerar si las inclusiones $\mathrm{Nu}(f^i) \subseteq \mathrm{Nu}(f^{i+1})$ son estrictas o no).

iii) Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Se define la transformación lineal $f : V \to V$ de la siguiente forma:

$$f(v_i) = \begin{cases} v_{i+1} & \text{si } 1 \le i \le n-1 \\ 0 & \text{si } i = n \end{cases}$$

Probar que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$.

iv) Si $V = \mathbb{R}^n$, para cada i , $2 \le i \le n$ construir una transformación lineal nilpotente $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f^i = 0$ y $f^{i-1} \neq 0$.

Ejercicio 18. Sea $S = < (1,1,0,1), (2,1,0,1) > \subseteq \mathbb{R}^4$.

i) Hallar una transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{Nu}(f) = S$.

ii) Hallar ecuaciones para S (usar i)).

iii) Hallar un sistema de ecuaciones lineales cuyo conjunto de soluciones sea

$< (1,1,0,1), (2,1,0,1) > + (0,1,1,2)$.

Ejercicio 19.

i) Sea $S \subseteq K^n$ el conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo. Encontrar una transformación lineal $f : K^n \to K^n$ tal que $\mathrm{Nu}(f) = S$.

ii) Sea $T \subseteq K^n$ el conjunto de soluciones de un sistema lineal no homogéneo. Encontrar una transformación lineal $f : K^n \to K^n$ y $x \in K^n$ tales que $T = f^{-1}(x)$.

Ejercicio 20. Sea $f : V \to V$ una tranformación lineal y sean B, B' bases de V. Calcular $|f|_{BB'}$ en cada uno de los siguientes casos:

i) $V = \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (3.x_1 - 2.x_2 + x_3, 5.x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 3.x_2 + 4.x_3)$,

$B = B'$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$

ii) $V = \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (3.x_1 - 2.x_2 + x_3, 5.x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 3.x_2 + 4.x_3)$,

$B = \{(1,2,1), (-1,1,3), (2,1,1)\}$ y $B' = \{(1,1,0), (1,2,3), (-1,3,1)\}$

iii) $V = \mathbb{C}^2$, $f(x_1, x_2) = (2.x_1 - i.x_2, x_1 + x_2)$, $B = B'$ es la base canónica de $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

iv) $V = \mathbb{C}^2$, $f(x_1, x_2) = (2.x_1 - i.x_2, x_1 + x_2)$, $B = B' = \{(1,0), (0,1), (i,0), (0,i)\}$ considerando a $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

v) $V = \mathbb{R}_4[X]$, $f(P) = P'$, $B = B' = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$

vi) $V = \mathbb{R}_4[X]$, $f(P) = P'$, $B = B' = \{X^4, X^3, X^2, X, 1\}$

vii) $V = \mathbb{R}_4[X]$, $f(P) = P'$, $B = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ y $B' = \{X^4, X^3, X^2, X, 1\}$

viii) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $f(A) = A^t$, $B = B'$ la base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

ix) V, f y $B = B'$ como en el ejercicio 17, iii)

Ejercicio 21. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $B' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que

$$|f|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

i) Hallar $f(3.v_1 + 2.v_2 - v_3)$ ¿Cuáles son sus coordenadas en la base B'?

ii) Hallar una base de $\mathrm{Nu}(f)$ y una base de $\mathrm{Im}(f)$.

iii) Describir el conjunto $f^{-1}(w_1 - 3.w_3 - w_4)$.

Ejercicio 22. Sea $A \in K^{m\times n}$ y $\theta_A : K^n \to K^m$ la transformación lineal definida por $\theta_A(x) = A.x$. Si E y E' son las bases canónicas de K^n y de K^m respectivamente, probar que $|\theta_A|_{EE'} = A$.

Ejercicio 23. Sean V y W K-espacios vectoriales y sea

$$\mathrm{Hom}(V, W) = \{f : V \to W \,/\, f \text{ es lineal}\}.$$

i) Probar que $\mathrm{Hom}(V, W)$ es un K-espacio vectorial con las operaciones naturales.

ii) Si $\dim V = n$ y $\dim W = m$, sean B y B' bases de V y de W respectivamente. Sea $T : \mathrm{Hom}(V, W) \to K^{m\times n}$ la aplicación definida por $T(f) = |f|_{BB'}$. Probar que T es lineal y que es un isomorfismo. Calcular $\dim(\mathrm{Hom}(V, W))$.

Ejercicio 24. Sean V, W y U K-espacios vectoriales de dimensión finita y sean B, B' y B'' bases de V, W y U respectivamente. Se consideran las transformaciones lineales $f : V \to W$ y $g : W \to U$. Probar que $|g \circ f|_{BB''} = |g|_{B'B''}.|f|_{BB'}$.

Ejercicio 25. Sean V y W K-espacios vectoriales de dimensión finita y sea $f : V \to W$ lineal. Si B y B' son bases de V, y U y U' son bases de W, deducir del ejercicio anterior que $|f|_{B'U'} = C(U, U').|f|_{BU}.C(B', B)$.

Ejercicio 26. Sea V un K-espacio vectorial y $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de V. Sea $f : V \to V$ la transformación lineal tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Calcular $|f^{-1}|_B$

ii) Calcular $f^{-1}(v_1 - 2.v_2 + v_4)$

Ejercicio 27. En cada uno de los siguientes casos, hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ para un n adecuado que verifique:

i) $A \neq I_n$ y $A^3 = I_n$

ii) $A \neq 0$; $A \neq I_n$ y $A^2 = A$

Ejercicio 28. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea B una base de V.

i) Sea $tr : \mathrm{Hom}(V,V) \to K$ la aplicación definida por $tr(f) = tr(|f|_B)$. Probar que $tr(f)$ no depende de la base B elegida.

   $tr(f)$ se llama la *traza* del endomorfismo f.

ii) Probar que $tr : \mathrm{Hom}(V,V) \to K$ es una transformación lineal.

Ejercicio 29. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, $U = \{v_1 + v_3, v_1 + 2.v_2 + v_3, v_2 + v_3\}$ y $U' = \{w_1, w_2, w_3\}$ bases de $\mathbb{R}^3$, y sea E la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$|f|_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad |f|_{UU'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinar U'.

Ejercicio 30.

i) Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la trasformación lineal definida por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$$

   y sea $v = (1, 0, 0, 0)$. Probar que $B = \{v, f(v), f^2(v), f^3(v)\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$. Calcular $|f|_B$.

ii) Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \to V$ una tranformación lineal tal que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$. Probar que existe una base B de V tal que

$$(|f|_B)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j + 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

   (Sugerencia: elegir $v_1 \notin \mathrm{Nu}(f^{n-1})$).

Ejercicio 31. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \to V$ un proyector. Probar que existe una base B de V tal que

$$(|f|_B)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \; ; \; i \leq \dim(\mathrm{Im}(f)) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

(Sugerencia: ver Ejercicio 15.)

Ejercicio 32. Sea $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2.x_1 - x_5, x_2 + 2.x_3, x_1 + x_4 + x_5, -x_1 + x_4 + x_5).$$

Encontrar bases B y B' de $\mathbb{R}^5$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente tales que $|f|_{BB'}$ sea una matriz diagonal.

Ejercicio 33. Sean V y W K-espacios vectoriales, dim $V = n$ y dim $W = m$, y $f : V \to W$ una transformación lineal tal que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = s$. Probar que existen una base B de V y una base B' de W tal que

$$(|f|_{BB'})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ ; } i \leq s \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Ejercicio 34. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2.x_1 - 3.x_2 + 2.x_3, 3.x_1 - 2.x_2 + x_3).$$

i) Determinar bases B y B' de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$|f|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ii) Si A es la matriz de f en la base canónica, encontrar matrices C, $D \in GL(3, \mathbb{R})$ tales que

$$C.A.D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 35. Calcular el rango de las siguientes matrices:

i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

iii) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

iv) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 36. Calcular el rango de $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ para cada $k \in \mathbb{R}$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 37.

i) Sea $A \in K^{m\times n}$ y sea $S = \{x \in K^n \,/\, A.x = 0\}$. Probar que $\mathrm{rg}(A) + \dim(S) = n$.

(Esto significa que la dimensión del espacio de soluciones es igual a la cantidad de incógnitas menos la cantidad de ecuaciones independientes).

ii) Sean $A \in K^{m\times n}$, $b \in K^m$. Se considera el sistema $A.x = b$ y sea $(A\,|\,b)$ su matriz ampliada. Probar que $A.x = b$ tiene solución $\iff$ $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A\,|\,b)$.

Ejercicio 38. Sea $A \in K^{m\times n}$, $\mathrm{rg}(A) = s$ y sea $T = \{x \in K^{n\times r} / \, A.x = 0\}$. Calcular la dimensión de T.

Ejercicio 39. Sean $A \in K^{m\times n}$ y $B \in K^{n\times r}$. Probar que $\mathrm{rg}(A.B) \le \mathrm{rg}(A)$ y $\mathrm{rg}(A.B) \le \mathrm{rg}(B)$.

Ejercicio 40. Sean $A \in K^{m\times n}$, $C \in GL(m, K)$ y $D \in GL(n, K)$.

i) Probar que $\mathrm{rg}(C.A) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A.D)$.

ii) Deducir que $\mathrm{rg}(C.A.D) = \mathrm{rg}(A)$.

Ejercicio 41. Sean A, $B \in K^{m\times n}$. Se dice que A es *equivalente* a B (y se nota $A \equiv B$) si existen $C \in GL(m, K)$ y $D \in GL(n, K)$ tales que $A = C.B.D$. Probar que $\equiv$ es una relación de equivalencia en $K^{m\times n}$.

Ejercicio 42. Sean A, $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Determinar C_1, C_2, C_3 y $C_4 \in GL(3, \mathbb{R})$ tales que

$$C_1.A.C_2 = C_3.D.C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Sugerencia: ver Ejercicio 34.)

ii) Determinar $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ y bases B, B', B_1 y B_1' de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$|f|_{BB'} = A \qquad \text{y} \qquad |f|_{B_1B_1'} = D$$

Ejercicio 43. Sean A , $C \in K^{m\times n}$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $A \equiv C$.

ii) $\exists\, f : K^n \to K^m$ tranformación lineal, bases B y B_1 de K^n y bases B' y B_1' de K^m tales que $|f|_{BB'} = A$ y $|f|_{B_1B_1'} = C$.

iii) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C)$.

Ejercicio 44. Dadas A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, decidir si existen matrices P, $Q \in GL(n,\mathbb{R})$ tales que $A = P.B.Q$.

i) $n = 2$; $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

ii) $n = 2$; $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

iii) $n = 3$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

iv) $n = 3$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 45. Sean A, $B \in K^{n\times n}$. Se dice que A es *semejante* a B (y se nota $A \sim B$) si existe $C \in GL(n, K)$ tal que $A = C.B.C^{-1}$.

i) Demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia en $K^{n\times n}$.

ii) Probar que dos matrices semejantes son equivalentes. ¿Vale la recíproca?

Ejercicio 46. Sean A, $C \in K^{n\times n}$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $A \sim C$.

ii) $\exists\, f : K^n \to K^n$ tranformación lineal y bases B y B' de K^n tales que $|f|_B = A$ y $|f|_{B'} = C$

Ejercicio 47.

i) Sean A, $C \in K^{n\times n}$ tales que $A \sim C$. Probar que $tr(A) = tr(C)$.

ii) Sean A, $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Existen $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ y bases B y B' de $\mathbb{R}^3$ tales que $|f|_B = A$ y $|f|_{B'} = C$?

Ejercicios de parciales

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ la transformación lineal definida por $f(A) = 4.A - 2\,tr(A).I_n$.

i) Si $n = 2$, probar que $\mathrm{Nu}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^{2\times 2}$.

ii) Si $n \geq 3$, probar que f es un isomorfismo.

Ejercicio 2. Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$S = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} / \, tr(A) = 0\} \quad \text{y} \quad T = \{B \in \mathbb{R}^{2\times 2} / \, B = B^t\}$$

Hallar una transformación lineal $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ que satisfaga **simultáneamente** $f(S) = T$, $f(T) = S$ y $f(v) \neq v\,,\, \forall\, v \in T - \{0\}$. (Justificar que la f hallada cumple todo lo pedido).

Ejercicio 3. Dadas $B = \{X^2 + X,\ X,\ X^2 + X + 1\}$ y $B' = \{X^2,\ 1,\ X\}$ bases de $\mathbb{R}_2[X]$, se considera la transformación lineal $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ tal que

$$|f|_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & a & 1 \\ a & 1 & 2a-2 \end{pmatrix}$$

Encontrar todos los $a, b \in \mathbb{R}$ para los que f cumple **simultáneamente**

$$\dim(\mathrm{Nu}(f)) = 1 \quad \text{y} \quad (b+1).X + b \in \mathrm{Im}(f).$$

Ejercicio 4. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ y sea $B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ tales que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 2$. Probar que $\mathrm{rg}(A.B) = 2$.

Ejercicio 5. Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{R}_3[X]$:

$$S = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(1) = 0 \,\wedge\, P'(2) = 0\}$$
$$T = < X^3 - 2X^2 + 2X - 2\,,\, 6X^2 - 12X + 4\,,\, 2X^3 + 2X^2 - 8X >$$

i) Hallar una transformación lineal $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ que satisfaga **simultáneamente**

$$f(S+T) = S \cap T\,, \qquad \mathrm{Im}(f) = T \qquad \text{y} \qquad f^2 = 0.$$

ii) Sea H un subespacio de dimensión 3 de $\mathbb{R}_3[X]$ tal que $\dim(H \cap T)$ =1. Para **cualquier** transformación lineal f que cumpla las condiciones del ítem i) calcular $f(H)$.