

ALGEBRA LINEAL - Práctica N°7 - Primer cuatrimestre de 2004

Forma de Jordan

Ejercicio 1. Dadas las matrices A y A' en $K^{n \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- Probar que ambas son nilpotentes y que A es semejante a A' .
- Dar bases B y B' de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tal que la matriz de la derivación en la base B sea A y en la base B' sea A' .
- Sea B una base de K^n y sea $f : K^n \rightarrow K^n$ tal que $|f|_B = A$. Probar que no existen subespacios propios f -invariantes S y T de K^n tales que $K^n = S \oplus T$.

Ejercicio 2. Sean A_i ($1 \leq i \leq 6$) matrices en $\mathbb{C}^{8 \times 8}$ nilpotentes tales que $m_{A_i} = X^3$ ($1 \leq i \leq 6$). ¿Es cierto que necesariamente dos de estas matrices son semejantes?

Ejercicio 3. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A \in \mathbb{C}^{9 \times 9}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$ nilpotentes tales que $m_A = m_B$ y $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$. Probar que A y B son semejantes. ¿Es cierto esto en $\mathbb{C}^{7 \times 7}$?

Ejercicio 5. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq j \\ 1 & \text{si } i > j \end{cases}$$

Ejercicio 6.

- Decidir si existe $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$ nilpotente tal que $\text{rg}(A) = 6$, $\text{rg}(A^2) = 4$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.
- Decidir si existe $A \in \mathbb{R}^{16 \times 16}$ tal que $m_A(X) = X^5$, $\text{rg}(A) = 9$, $\text{rg}(A^2) = 5$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

Ejercicio 7. Sea $f : \mathbb{C}^7 \rightarrow \mathbb{C}^7$ una transformación lineal y sea B una base de $\mathbb{C}^7$ tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Hallar $\mathcal{X}_f$ y m_f .
- Sea λ un autovalor de f tal que $\text{mult}(\lambda, \mathcal{X}_f) = m$. Se definen $E_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^7 / f(v) = \lambda.v\}$ y $V_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^7 / (\lambda.Id - f)^m(v) = 0\} = \text{Nu}((\lambda.Id - f)^m)$.
¿Para qué autovalores λ de f se tiene que $E_\lambda = V_\lambda$?
- Para cada autovalor λ de f , ¿cuál es la menor potencia k tal que $V_\lambda = \text{Nu}((\lambda.Id - f)^k)$?
- Si λ es un autovalor de f , se nota f_λ a la restricción de f a V_λ . Calcular $\dim(\text{Im}(f_\lambda))$ y $\dim(\text{Im}(f_\lambda^2))$ para cada λ .

Ejercicio 8. Sea V un K -espacio vectorial, sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal y sea $P \in K[X]$.

- Probar que $\text{Nu}(P(f))$ e $\text{Im}(P(f))$ son subespacios invariantes por f .
- Probar que si un autovalor λ de f es raíz de P , entonces $E_\lambda \subseteq \text{Nu}(P(f))$.
- Probar que si un autovalor λ de f no es raíz de P , entonces $E_\lambda \subseteq \text{Im}(P(f))$.

Ejercicio 9. Sean A y $B \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$. Probar que A es semejante a B si y sólo si $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B$ y $m_A = m_B$. ¿Es válida esta afirmación en $\mathbb{C}^{3 \times 3}$? ¿Y en $\mathbb{C}^{4 \times 4}$?

Ejercicio 10. Hallar la forma y una base de Jordan de $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ en cada uno de los siguientes casos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 11. Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & a \\ 3 & -1 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Para cada $a \in \mathbb{R}$, calcular $\mathcal{X}_A$, m_A y hallar la forma de Jordan de A .
- Para $a = 2$, hallar una base de Jordan para A .

Ejercicio 12. Sea $V \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$ el subespacio $V = \langle e^x, x.e^x, x^2.e^x, e^{2x} \rangle$. Sea $\delta : V \rightarrow V$ la transformación lineal definida por $\delta(f) = f'$. Hallar la forma y una base de Jordan para δ .

Ejercicio 13. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Decidir si A y B son semejantes.

Ejercicio 14. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ tales que $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B = (X-1)^3.(X-3)^2$ y $m_A = m_B$. Decidir si, necesariamente, A es semejante a B .

Ejercicio 15. Encontrar todas las formas de Jordan posibles de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ en cada uno de los siguientes casos:

- i) $\mathcal{X}_A(X) = (X-2)^4(X-3)^2$; $m_A(X) = (X-2)^2(X-3)^2$
- ii) $\mathcal{X}_A(X) = (X-7)^5$; $m_A(X) = (X-7)^2$
- iii) $\mathcal{X}_A(X) = (X-2)^7$; $m_A(X) = (X-2)^3$
- iv) $\mathcal{X}_A(X) = (X-3)^4(X-5)^4$; $m_A(X) = (X-3)^2(X-5)^2$

Ejercicio 16. Sea $A \in \mathbb{C}^{15 \times 15}$ una matriz con autovalores λ_1, λ_2 y λ_3 y que cumple, simultáneamente:

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(A - \lambda_1.I) &= 13, & \operatorname{rg}(A - \lambda_1.I)^2 &= 11, & \operatorname{rg}(A - \lambda_1.I)^3 &= 10, & \operatorname{rg}(A - \lambda_1.I)^4 &= 10, \\ \operatorname{rg}(A - \lambda_2.I) &= 13, & \operatorname{rg}(A - \lambda_2.I)^2 &= 11, & \operatorname{rg}(A - \lambda_2.I)^3 &= 10, & \operatorname{rg}(A - \lambda_2.I)^4 &= 9, \\ \operatorname{rg}(A - \lambda_3.I) &= 13, & \operatorname{rg}(A - \lambda_3.I)^2 &= 12, & \operatorname{rg}(A - \lambda_3.I)^3 &= 11. \end{aligned}$$

Hallar su forma de Jordan.

Ejercicio 17. Dar la forma de Jordan de una matriz $A \in \mathbb{C}^{14 \times 14}$ que verifica, simultáneamente:

$$\begin{aligned} m_A &= (X - \lambda_1)^2.(X - \lambda_2).(X - \lambda_3)^2.(X - \lambda_4)^3 \quad (\text{con } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j), \\ \operatorname{rg}(A - \lambda_1.I) &= 11, \operatorname{rg}(A - \lambda_1.I)^2 = 10, \operatorname{rg}(A - \lambda_3.I) = 12, \operatorname{rg}(A - \lambda_3.I)^2 = 10 \text{ y} \\ \operatorname{rg}(A - \lambda_4.I) &= 13. \end{aligned}$$

Ejercicio 18. Hallar la forma de Jordan de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n+1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & n-2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 19. Sean $x, y \in \mathbb{C}^n$ y $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = x_i \cdot y_j$.

- i) Calcular todos los autovalores y autovectores de A .
- ii) Calcular las posibles formas de Jordan de A .

Ejercicio 20. Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Probar que A y A^t son semejantes.

Ejercicio 21. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, sea $J(\lambda, m) \in \mathbb{C}^{m \times m}$ la matriz

$$J(\lambda, m) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

- i) Calcular $J(\lambda, m)^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Generalizar para cualquier potencia de una matriz formada por bloques de Jordan.

Sugerencia: $J(\lambda, m) = \lambda I_m + J(0, m)$.

- ii) Verificar que $\text{rg}(J(\lambda, m)^k - \lambda^k I_m) = m - 1$ para $\lambda \neq 0$.
- iii) Si $\lambda \neq 0$, hallar la forma de Jordan de $J(\lambda, m)^k$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 22. Sea $A \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$ una matriz tal que $m_A = X^6$ y sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ una base de Jordan para A . Calcular la forma y una base de Jordan para las matrices A^2, A^3, A^4 y A^5 .

Ejercicio 23. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar $B \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ tal que $B^2 = A$.

(*) **Ejercicio 24.** Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se define la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha, a_1 = \beta \\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Hallar una fórmula general para el término a_n , $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Sugerencia: Ver el razonamiento del ejercicio 8 de la práctica 6 e intentar modificarlo convenientemente utilizando el ejercicio 20 de esta práctica.

(*) **Ejercicio 25.** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 3x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ x_3'(t) &= -x_2(t) + 2x_3(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x_1(0) = 1, x_2(0) = 2, x_3(0) = 1$.