ALGEBRA LINEAL - Práctica N°9 - Primer cuatrimestre de 2004

Variedades Lineales

Ejercicio 1. Sea V un K-espacio vectorial y sean $P, Q \in V$; $P \neq Q$. Sea $S = < Q - P >$ y sea $M = S + P$. Probar la validez de las siguientes afirmaciones:

i) P y Q están en M.

ii) $M = S + Q$

iii) Si $M' \subseteq V$ es una variedad lineal tal que $P, Q \in M'$ entonces $M \subseteq M'$.

iv) $M = \{\lambda.Q + \mu.P \,/\, \lambda\,,\, \mu \in K\,;\, \lambda + \mu = 1\}$

Ejercicio 2. Probar que cada uno de los siguientes conjuntos son variedades lineales y calcular su dimensión:

i) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2.x_1 - x_3 = 1 \text{ y } x_2 + x_3 = -2\}$

ii) $M_2 = \{(1, 2, 3)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

iii) $M_3 = \{P \in \mathbb{Q}_3[X] \,/\, P'(2) = 1\}$

iv) $M_4 = \{A \in \mathbb{C}^{2\times 2} \,/\, tr(A) = 5\}$

Ejercicio 3.

i) Sea $L \subseteq \mathbb{R}^3$ la recta que pasa por los puntos $(2, -1, 0)$ y $(1, 3, -1)$. Hallar una variedad lineal M de dimensión 2 que contenga a L. ¿Es M única?

ii) Sea $\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2.x_1 - x_2 + x_3 = 1\}$ y sea $L = < (0, 1, 1) > + (1, 1, 0)$. Hallar una variedad lineal $M \subseteq \mathbb{R}^3$ de dimensión 2 tal que $M \cap \Pi = L$.

Ejercicio 4. Determinar la dimensión de la variedad lineal

$$M = \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - x_2 + 3.x_3 = 0,\ 2.x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ -x_1 + x_2 + a.x_3 = 0\big\}$$

de acuerdo a los distintos valores de $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 5. Hallar ecuaciones implícitas para las siguientes variedades lineales:

i) $M = < (1, 2, 1), (2, 0, 1) > + (1, 1, 1) \subseteq \mathbb{R}^3$.

ii) $M \subseteq \mathbb{R}^4$ la mínima variedad que contiene a $(1, 1, 2, 0)$, $(2, 1, 1, 0)$ y $(-1, 0, 4, 1)$.

Ejercicio 6.

i) Sea $A \in K^{m\times n}$ y sea $b \in K^m$ tal que $\text{rg}(A|b) = \text{rg}(A)$. Probar que las soluciones de la ecuación $A.x = b$ forman una variedad lineal y calcular su dimensión. ¿Qué pasa si $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A|b)$?

ii) Sea $M \subseteq K^n$ una variedad lineal. Probar que existen $A \in K^{m\times n}$ y $b \in K^m$ para algún m conveniente tal que $M = \{x \in K^n / \, A.x = b\}$.

iii) Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita, B una base de V y $M \subseteq V$ una variedad lineal. Deducir de ii) que las coordenadas de los elementos de M en la base B son exactamente las soluciones de algún sistema lineal de ecuaciones.

Ejercicio 7. Sea $L = < (2, 1, 1) > + (0, -1, 1) \subseteq \mathbb{R}^3$.

i) Hallar un plano Π tal que $0 \in \Pi$ y $L \subseteq \Pi$.

ii) ¿Existirá un plano Π' tal que $L \subseteq \Pi'$, $0 \in \Pi'$ y $(0, 0, 1) \in \Pi'$ simultáneamente?

Ejercicio 8.

i) Encontrar en $\mathbb{R}^3$ dos rectas alabeadas que pasen por $(1, 2, 1)$ y $(2, 1, 1)$ respectivamente.

ii) Encontrar en $\mathbb{R}^4$ dos planos alabeados que pasen por $(1, 1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1, 1)$ respectivamente.

iii) ¿Hay planos alabeados en $\mathbb{R}^3$? Más generalmente, si V es un K-espacio vectorial de dimensión n y M_1 y M_2 son variedades lineales alabeadas en V, ¿qué se puede decir de sus dimensiones?

Ejercicio 9.

i) Sea $S = < (2, -3) > \subseteq \mathbb{R}^2$. Hallar una recta $L \parallel S$ tal que $(1, -1) \in L$. Graficar.

ii) Sea $L_1 = < (2, 1, 0) > + (0, 0, 1)$. Hallar una recta $L_2 \parallel L_1$ que pase por el punto $(-1, 3, 0)$.

iii) Si L_1 y L_2 son las variedades de ii), hallar un plano $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $L_1 \subseteq \Pi$ y $L_2 \subseteq \Pi$ simultáneamente. ¿Es Π único?

iv) Con las notaciones anteriores, hallar un plano $\Pi' \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $\Pi \cap \Pi' = L_1$.

Ejercicio 10. En cada uno de los siguientes casos, decidir si las variedades lineales M_1 y M_2 se cortan, son paralelas o alabeadas. En cada caso, hallar $M_1 \cap M_2$, $M_1 \vee M_2$ y calcular todas las dimensiones:

i) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / \, x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$
$M_2 = < (1, 0, 1) > + (0, 0, -3)$

ii) $M_1 = < (1, 2, 1, 0), (1, 0, 0, 1) > + (1, 2, 2, -1)$
$M_2 = < (1, 0, 1, 1), (2, 2, 1, 0) > + (-1, 4, 2, -3)$

iii) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / \, x_1 - x_2 - 1 = x_3 + x_4 = 0\}$
$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / \, x_1 - x_2 = x_2 + x_3 + x_4 - 1 = 0\}$

Ejercicio 11. Sean

$$M_1 = < (1, 1, 1) > + (0, 2, 0) \ \text{ y } \ M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / \, x_1 + x_2 - x_3 = x_1 - x_2 + x_3 = 1\}.$$

i) Hallar planos Π_1 y Π_2 de $\mathbb{R}^3$ tales que $M_1 \subseteq \Pi_1$, $M_2 \subseteq \Pi_2$ y $\Pi_1 \parallel \Pi_2$ simultáneamente.

ii) Hallar $M_1 \cap M_2$ y $M_1 \vee M_2$ y calcular sus dimensiones.

Ejercicio 12. Sean

$$\begin{aligned} L_1 &= \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 / x_1-3.x_3=0\,,\ x_2-x_3=-2\} \quad \text{y} \\ L_2 &= \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 / x_1-6.x_3=1\,,\ x_2+2.x_3=0\}\,. \end{aligned}$$

Hallar una recta $L\subseteq\mathbb{R}^3$ que pase por el punto $(1,0,2)$ y corte a L_1 y a L_2.

Ejercicio 13. Sean $A=(1,1,2)$ y $B=(2,0,2)$. Sea $\Pi=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x_1+x_2=2\}$. Hallar $C\in\Pi$ tal que A, B y C formen un triángulo equilátero. ¿La solución es única?

Ejercicio 14. Se consideran en $\mathbb{R}^2$ las rectas dadas por las ecuaciones $L_1: x_2=0$, $L_2: x_2=\alpha$ y $L_3: x_2=\beta$, con α y β dos números no nulos y distintos entre sí. Sean L y L' dos rectas transversales a L_1, L_2 y L_3. Probar que

$$\frac{d(L_1\cap L, L_2\cap L)}{d(L_2\cap L, L_3\cap L)}=\frac{d(L_1\cap L', L_2\cap L')}{d(L_2\cap L', L_3\cap L')}.$$

Este enunciado se conoce con el nombre de *Teorema de Thales.*

Ejercicio 15.

Definición: Dado el triángulo PQR, se llama *mediana correspondiente al vértice* P a la recta que pasa por dicho vértice y por el punto medio del lado $\overline{QR}$.

Se considera en $\mathbb{R}^2$ el triángulo cuyos vértices son $P=(0,0)$, $Q=(c,0)$ y $R=(a,b)$.

i) Probar que sus tres medianas se cortan en un punto M.

ii) Probar que si $d(M,P)=d(M,Q)=d(M,R)$, el triángulo PQR es equilátero.

Ejercicio 16.

Definición: un *paralelogramo* es un cuadrilátero tal que sus lados opuestos son paralelos.

i) Probar que si el cuadrilátero dado en $\mathbb{R}^2$ por los puntos $(0,0)$, (a,b), (c,d) y $(e,0)$ es un paralelogramo, el punto de intersección de sus diagonales es el punto medio de cada una de ellas.

ii) Bajo las mismas hipótesis de i), probar que si las diagonales son perpendiculares, los cuatro lados son iguales.

Ejercicio 17. Sean A_1, A_2 y A_3 en $\mathbb{R}^3$ tres puntos no alineados. Probar que el conjunto

$$S=\{x\in\mathbb{R}^3 \,/\, d(x,A_1)=d(x,A_2)=d(x,A_3)\}$$

es una recta ortogonal al plano que contiene a A_1, A_2 y A_3. Calcular S en el caso $A_1=(1,-1,0)$, $A_2=(0,1,1)$ y $A_3=(1,1,2)$.

Ejercicio 18. Sea $P:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal, para el producto interno canónico, sobre el subespacio $S=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \,/\, 2.x_1-x_2=0\}$.

i) Encontrar una recta $L \subset \mathbb{R}^3$ tal que $P(L) = (1,2,1)$. ¿Es única?

ii) Encontrar una recta $L_1 \subset \mathbb{R}^3$ tal que $P(L_1) = L_2$ siendo $L_2 : \begin{cases} 2.x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$. ¿Es única?

Ejercicio 19. Hallar en $\mathbb{R}^n$ el complemento ortogonal a M que pasa por A, la proyección ortogonal de A sobre M y $d(A,M)$ en los siguientes casos:

i) $n = 2, \quad M : x_1 - x_2 = 2, \quad A = (2,3)$

ii) $n = 3, \quad M : \begin{cases} 3.x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}, \quad A = (1,0,0)$

iii) $n = 4, \quad M : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2.x_1 - 3.x_4 = 2 \end{cases}, \quad A = (0,2,0,-1)$

Ejercicio 20. Dado en $\mathbb{R}^2$ el triángulo de vértices $A = (2,-3)$, $B = (8,5)$ y $C = (14,11)$, hallar la longitud de la altura que pasa por el vértice A.

Ejercicio 21. Se consideran en $\mathbb{R}^2$ los puntos $O = (0,0)$, $P = (a,b)$ y $Q = (c,d)$. Dichos puntos forman un triángulo isósceles con base $\overline{PQ}$. Probar que la altura correspondiente a la base corta a ésta en su punto medio.

Ejercicio 22. Sean en $\mathbb{R}^3$ los puntos $A_1 = (1,-1,0)$ y $A_2 = (1,1,1)$. Encontrar tres hiperplanos H tales que $d(A_1,H) = d(A_2,H)$.

Ejercicio 23.

i) Calcular el ángulo entre las rectas de $\mathbb{R}^2$ definidas por $L_1 : x_1 - x_2 = 1$ y $L_2 : x_1 + x_2 = 3$.

ii) Hallar una recta L_3 tal que $\mathrm{Ang}(L_1,L_2) = \mathrm{Ang}(L_2,L_3)$ y $L_1 \cap L_2 \in L_3$.

Ejercicio 24. Sea $L \subset \mathbb{R}^3$ la recta $L = <(1,-1,1)> + \ (2,1,0)$. Encontrar un plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ tal que $(2,1,0) \in \Pi$ y $\mathrm{Ang}(L,\Pi) = \frac{\pi}{4}$.

Ejercicio 25. Sean M_1 y M_2 variedades lineales de $\mathbb{R}^n$, $A \in M_1$, $B \in M_2$ y S_1, S_2 los subespacios de $\mathbb{R}^n$ asociados a M_1 y a M_2. Si $S = S_1 + S_2$ probar:

i) Si $A - B = v + u$ con $v \in S$ y $u \in S^{\perp}$, entonces u no depende de la elección de $A \in M_1$ ni de la elección de $B \in M_2$.

ii) Si $x \in M_1$ e $y \in M_2$, entonces $d(x,y) \geq \| u \|$.

iii) En la situación de i), sea $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in S_1$ y $v_2 \in S_2$. Si $P = A + (-v_1)$ y $Q = B + v_2$, entonces $P \in M_1$, $Q \in M_2$ y $d(x,y) \geq d(P,Q) = \| u \| \ \forall x \in M_1, y \in M_2$. Luego $\| u \| = d(M_1,M_2)$.

Ejercicio 26. Hallar la distancia entre M_1 y M_2 en los siguientes casos:

i) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - 2.x_2 + x_3 = 1\}$
$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - 2.x_2 + x_3 = 3\}$

ii) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 = 1 \,,\, x_1 - x_3 = 0\}$
$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \,,\, x_3 = 1\}$

iii) $M_1 = < (1, -1, 0), (2, 1, 1) > + (1, 0, 0)$
$M_2 = \{(3, 0, 1)\}$

iv) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 + x_3 = -2 \,,\, x_2 - 2.x_4 = 2\}$
$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \,,\, x_2 - 2.x_4 = -8 \,,\, x_1 - x_2 + x_4 = 5\}$

Ejercicio 27. Utilizando el ejercicio 25, demostrar que si M_1 y M_2 son variedades lineales de $\mathbb{R}^n$ con $\dim M_1 \leq \dim M_2$ y $M_1 \parallel M_2$, entonces $d(M_1, M_2) = d(P, M_2)$ para todo $P \in M_1$.

Ejercicio 28. Sea en $\mathbb{R}^2$ la recta L que pasa por los puntos $(2, -1)$ y $(5, 3)$. Determinar una recta $L' \parallel L$ tal que $d(L, L') = 2$.

Ejercicio 29. Sean en $\mathbb{R}^3$ la recta $L = < (1, 1, 2) >$ y el punto $P = (1, 0, -2)$. Encontrar un plano H ortogonal a L tal que $d(P, H) = \sqrt{6}$.

Ejercicio 30. Sean en $\mathbb{R}^3$ la recta $L = < (1, 2, -2) > + (0, 2, 0)$ y el punto $P = (1, 2, 2)$. Encontrar ecuaciones implícitas de una recta L' ortogonal a L tal que $d(P, L') = 3$ y $L \cap L' = \emptyset$. ¿Es única?

Ejercicio 31. Sean

$$M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2.x_1 - x_2 + x_3 = 1\} \quad \text{y} \quad M_2 = (1, 1, 1) + < (0, 1, 1), (1, 0, -2) >.$$

Hallar un plano H tal que $M_i \parallel H$ $(i = 1, 2)$ y $d(P_1, H) = d(P_2, H)$.

Ejercicio 32. Sea $L = < (3, 0, -4) > + (1, -1, 0)$. Encontrar una recta L' alabeada con L, tal que $d(L, L') = 2$.

Ejercicio 33.

i) Construir una rotación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(M_1) = M_2$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $M_1 = \{(1, 2, -1)\}, \quad M_2 = \{(-1, 2, 1)\}$

b) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - x_2 = 2,\, x_3 = 1\}$
$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - 2.x_2 = 1,\, 3.x_2 - x_3 = -4\}$

c) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - x_2 + x_3 = 3\}$
$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - x_2 + x_3 = -3\}$

ii) Encontrar M_1 y M_2 variedades lineales de $\mathbb{R}^3$ de igual dimensión tales que no haya ninguna rotación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla $f(M_1) = M_2$.

Ejercicio 34. Sean en $\mathbb{R}^3$ los planos Π_1 y Π_2 definidos por las ecuaciones:

$$\Pi_1 : x_2 - x_3 = 1 \qquad \text{y} \qquad \Pi_2 : x_2 + x_3 = -1.$$

Definir una transformación ortogonal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(\Pi_1) = \Pi_2$ y $f(\Pi_2) = \Pi_1$.

Ejercicio 35. Sea $k \in \mathbb{R}$ y sean Π_1 y Π_2 los planos en $\mathbb{R}^3$ definidos por

$$\Pi_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / \, x_1 - x_2 + 2x_3 = k\} \quad \text{y} \quad \Pi_2 = < (1,0,1), (0,1,2) > + \, (1,-1,1).$$

Determinar k para que exista una simetría $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(\Pi_1) = \Pi_2$. Para ese valor de k hallar dicha simetría y calcular $f(\Pi_2)$.