

Álgebra Lineal

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2004

PRÁCTICA 3

CAMBIO DE BASE. MATRICES DE TRANSFORMACIONES LINEALES.

1. Encontrar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base \mathcal{B} en los siguientes casos:

a) $V = \mathbb{K}^n$, $v = (x_1, \dots, x_n)$ y \mathcal{B} la base canónica.

b) $V = \mathbb{R}^3$, $v = (1, 2, -1)$ y $\mathcal{B} = \{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$.

c) $V = \mathbb{R}^3$, $v = (1, -1, 2)$ y $\mathcal{B} = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, 2)\}$.

d) $V = \mathbb{R}^3$, $v = (x_1, x_2, x_3)$ y $\mathcal{B} = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, 2)\}$.

e) $V = \mathbb{R}_{<4}[X]$, $v = 2X^2 - X^3$ y $\mathcal{B} = \{3, 1 + X, X^2 + 5, X^3 + X^2\}$.

f) $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, y $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$.

¿Qué cambia si cambiamos el cuerpo a \mathbb{Q} ó \mathbb{C} ? ¿Y si el cuerpo es \mathbb{Z}_2 ?

2. a) Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ tales que, $\forall x \in \mathbb{K}^{n \times 1}$, $A \cdot x = B \cdot x$. Probar que $A = B$.

b) Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión n y sean $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ bases de V . Probar que

$$\mathcal{C}(\mathcal{B}, \mathcal{B}'') = \mathcal{C}(\mathcal{B}', \mathcal{B}'') \cdot \mathcal{C}(\mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

c) Deducir que $\mathcal{C}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$, con $\mathcal{C}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1} = \mathcal{C}(\mathcal{B}', \mathcal{B})$.

3. Calcular $\mathcal{C}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ y $\mathcal{C}(\mathcal{B}', \mathcal{B})$ en los siguientes casos. Calcular las coordenadas de v en \mathcal{B} y \mathcal{B}' .

a) $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, 2)\}$, $\mathcal{B}' = \{(-1, 3), (2, 5)\}$, $v = (1, 2)$.

b) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$, $\mathcal{B}' = \{(-1, 1, 1), (2, 0, 1), (1, -1, 3)\}$, $v = (2, 2, 2)$.

c) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$, $\mathcal{B}' = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$, $v = (2, 2, 2)$.

d) $V = \mathbb{R}_{<3}[X]$, $\mathcal{B} = \{3, 1 + X, X^2\}$, $\mathcal{B}' = \{1, X + 3, X^2 + X\}$, $v = 1 + X - X^2$.

e) $V = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $\mathcal{B}' = \{v_3, v_1, v_4, v_2\}$, $v = \sum_{i=1}^4 i v_i$.

f) $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\mathcal{B} = \{E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22}\}$, $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$, $v = I_2$.

4. Sean $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Hallar bases \mathcal{B}' y \mathcal{B}'' tales que $\mathcal{C}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = M = \mathcal{C}(\mathcal{B}'', \mathcal{B})$.

5. Sean $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal y $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de V . Calcular $\|f\|_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $V = \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2 + x_3, 5x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 + 4x_3)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ la base canónica de \mathbb{R}^3 .

b) $V = \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2 + x_3, 5x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 + 4x_3)$, $\mathcal{B} = \{(1, 2, 1), (-1, 1, 3), (2, 1, 1)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0), (1, 2, 3), (-1, 3, 1)\}$.

c) $V = \mathbb{C}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - ix_2, x_1 + x_2)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ es la base canónica de \mathbb{C}^2 como \mathbb{C} -espacio vectorial.

d) $V = \mathbb{C}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - ix_2, x_1 + x_2)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = \{(1, 0), (0, 1), (i, 0), (0, i)\}$ considerando a \mathbb{C}^2 como \mathbb{R} -espacio vectorial.

e) $V = \mathbb{R}_{<5}[X]$, $f(p) = p'$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$.

f) $V = \mathbb{R}_{<5}[X]$, $f(p) = p'$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = \{X^4, X^3, X^2, X, 1\}$.

g) $V = \mathbb{R}_{<5}[X]$, $f(p) = p'$, $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$, $\mathcal{B}' = \{X^4, X^3, X^2, X, 1\}$.

h) $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $f(A) = A^t$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ la base canónica de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

i) V de dimensión n , $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $f(v_i) = \begin{cases} v_{i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq n-1 \\ 0 & \text{si } i = n. \end{cases}$

6. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de \mathbb{R}^3 y $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base de \mathbb{R}^4 . Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que

$$\|f\|_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

- a) Hallar $f(3v_1 + 2v_2 - v_3)$ ¿Cuáles son sus coordenadas en la base \mathcal{B}' ?
 b) Hallar una base de $\text{Nu}(f)$ y una base de $\text{Im}(f)$.
 c) Describir el conjunto $f^{-1}(w_1 - 3w_3 - w_4)$.

7. Sean $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ y $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ las bases canónicas de \mathbb{K}^m y \mathbb{K}^n respectivamente. Sea $L_A : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$ definida por $L_A(x) = (A \cdot x^t)^t$. Probar que $\|L_A\|_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} = A$.

8. Sean V y W \mathbb{K} -espacios vectoriales y sea $\text{Hom}(V, W) = \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ es lineal}\}$.
 a) Probar que $\text{Hom}(V, W)$ es un \mathbb{K} -espacio vectorial con las operaciones naturales.
 b) Si $\dim V = n$ y $\dim W = m$, sean \mathcal{B} y \mathcal{B}' bases de V y de W respectivamente. Sea

$$T : \text{Hom}(V, W) \rightarrow \mathbb{K}^{m \times n}$$

la aplicación definida por $T(f) = \|f\|_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$. Probar que T es lineal y que es un isomorfismo. Calcular $\dim(\text{Hom}(V, W))$.

9. a) Sean V_1, V_2, V_3 \mathbb{K} -e.v. de dimensión finita con bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ respectivamente. Sea $f : V_1 \rightarrow V_2$ y $g : V_2 \rightarrow V_3$. Probar que

$$\|g \circ f\|_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_3} = \|g\|_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3} \cdot \|f\|_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}.$$

- b) Sean $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $B \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$. Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(BAB^{-1})^n = BA^nB^{-1}.$$

- c) Sean V_1, V_2 \mathbb{K} -e.v., $\mathcal{B}_i, \mathcal{B}'_i$ bases de V_i ($i = 1, 2$). Sea $f : V_1 \rightarrow V_2$ lineal. Probar que

$$\|f\|_{\mathcal{B}'_1\mathcal{B}'_2} = \mathcal{C}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2) \cdot \|f\|_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} \cdot \mathcal{C}(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1).$$

- d) Sea V un \mathbb{K} -e.v., $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de V y $f \in \text{End}(V) = \text{Hom}(V, V)$. Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(\|f\|_{\mathcal{B}'})^n = \|f^n\|_{\mathcal{B}'} = \mathcal{C}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \cdot \|f^n\|_{\mathcal{B}} \cdot \mathcal{C}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = (\mathcal{C}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \cdot \|f\|_{\mathcal{B}} \cdot \mathcal{C}(\mathcal{B}', \mathcal{B}))^n.$$

- a) Encontrar, para cada $n \geq 2$, una matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $A \neq \mathbf{1}$ y $A^n = \mathbf{1}$.
 b) Encontrar, para cada $n \geq 2$, una matriz $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ tal que $A \neq \mathbf{1}$ y $A^n = \mathbf{1}$.

10. Recordemos, para $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$, la definición de la *traza de A*, dada por $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Dado V un \mathbb{K} -e.v. de dimensión finita n y $f \in \text{End}(V)$, definimos $\text{tr}(f) = \text{tr}(\|f\|_{\mathcal{B}})$, con \mathcal{B} una base de V . Probar que esta definición tiene sentido (es decir, que no depende de la base \mathcal{B}). Probar que $\text{tr} : \text{End}(V) \rightarrow \mathbb{K}$ es lineal.

11. Sean $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, $U = \{v_1 + v_3, v_1 + 2v_2 + v_3, v_2 + v_3\}$ y $U' = \{w_1, w_2, w_3\}$ bases de \mathbb{R}^3 , \mathcal{E} la base canónica de \mathbb{R}^3 . Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$\|f\|_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \|f\|_{UU'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinar U' .

12. Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal tal que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$. Probar que existe una base \mathcal{B} de V tal que

$$(\|f\|_{\mathcal{B}})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j + 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

(Sugerencia: elegir $v_1 \notin \text{Nu}(f^{n-1})$).

13. Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \rightarrow V$ un proyector. Probar que existe una base \mathcal{B} de V tal que

$$(\|f\|_{\mathcal{B}})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, i \leq \dim(\text{Im}(f)) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

14. Sean V y W \mathbb{K} -espacios vectoriales, $\dim V = n$ y $\dim W = m$ y $f : V \rightarrow W$ una transformación lineal tal que $\dim(\text{Im}(f)) = s$. Probar que existe una base \mathcal{B} de V y una base \mathcal{B}' de W tal que

$$(\|f\|_{\mathcal{B}\mathcal{B}'})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j; i \leq s \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

15. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + 2x_3, 3x_1 - 2x_2 + x_3)$.
a) Determinar bases \mathcal{B} y \mathcal{B}' de \mathbb{R}^3 tales que

$$\|f\|_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- b) Si A es la matriz de f en la base canónica, encontrar matrices $C, D \in \text{GL}(3, \mathbb{R})$ tales que

$$CAD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

16. Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y sea $S = \{x \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot x = 0\}$. Probar que $\text{rg}(A) + \dim(S) = n$. (Esto significa que la dimensión del espacio de soluciones es igual a la cantidad de incógnitas menos la cantidad de ecuaciones independientes)
b) Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{K}^m$. Se considera el sistema $A \cdot x = b$ y sea $(A|b)$ su matriz ampliada. Probar que $A \cdot x = b$ tiene solución $\iff \text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$.

17. Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n \times m}$. Probar que son equivalentes:

- a) $\exists C \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$, $D \in \text{GL}(m, \mathbb{K})$ tales que $A = CBD$.
b) Dadas $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ bases de \mathbb{K}^m y \mathbb{K}^n respectivamente, $\exists f : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$ y bases $\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2$ bases de \mathbb{K}^m y \mathbb{K}^n respectivamente tales que $\|f\|_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = A$ y $\|f\|_{\mathcal{B}'_1\mathcal{B}'_2} = B$.
c) $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$.

18. Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Probar que son equivalentes:

- a) $\exists C \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$ tal que $A = CAC^{-1}$.
b) Dada \mathcal{B} base de \mathbb{K}^n , $\exists f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ y una base \mathcal{B}' tales que $\|f\|_{\mathcal{B}} = A$ y $\|f\|_{\mathcal{B}'} = B$.
Comparar con el ejercicio anterior.

19. Decidir, en los siguientes casos, si existen matrices C, D tales que $A = CBD$:

$$\begin{array}{ll} a) A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & c) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ b) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} & d) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

En los casos en que tales C, D existen, ¿se pueden encontrar de manera que $D = D^{-1}$? (Sug: pensar en la traza)