

Álgebra Lineal

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2004

PRÁCTICA 4

ESPACIO DUAL

- Sea $S \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$ el subespacio $S = \{\varphi \in (\mathbb{R}^3)^* / \varphi(1, -1, 2) = 0\}$. Encontrar una base de S .
- Dada la base B del \mathbb{R} -espacio vectorial V , hallar su base dual en cada uno de los siguientes casos
 - $V = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1, -1), (2, 0)\}$
 - $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1, -1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
 - $V = \mathbb{R}_{<4}[X]$, $B = \{-X + 2, X - 1, X^2 - 3.X + 2, X^3 - 3.X^2 + 2.X\}$
- Sea $B' = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ la base de $(\mathbb{R}^3)^*$ definida por

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 \quad \varphi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3 \quad \varphi_3(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3$$

Hallar la base B de \mathbb{R}^3 tal que $B' = B^*$

- Sean f_1, f_2 y $f_3 \in (\mathbb{R}_{<3}[X])^*$ las siguientes formas lineales

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x) dx \quad f_2(p) = \int_0^2 p(x) dx \quad f_3(p) = \int_{-1}^0 p(x) dx$$

Probar que $\{f_1, f_2, f_3\}$ es una base de $(\mathbb{R}_{<3}[X])^*$. Hallar una base B de $\mathbb{R}_{<3}[X]$ tal que $B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$

- Sea $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ definida por $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 2.x_1 + 3.x_2 - x_3$ y sea $E^* = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$ la base dual de la canónica.
 - Calcular las coordenadas de φ en E^*
 - Calcular las coordenadas de φ en la base $B^* = \{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3, \delta_1 + \delta_2, \delta_1\}$
 - Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ el subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3) / 2.x_1 + 3.x_2 - x_3 = 0\}$ y sea $B \subset \mathbb{R}^3$ la base

$$B = \{(0, 0, 1), (0, 1, -1), (1, -1, 0)\}$$

Encontrar una ecuación para S en la base B .

(Sugerencia: notar que B^* es la base dual de B y no hacer ninguna cuenta)

- Sea $B \subset \mathbb{R}^2$ la base $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$. Encontrar las coordenadas de la base dual de B en la base dual de la canónica.
- Sean $B_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ y $B_2 = \{(1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1)\}$ bases de \mathbb{R}^3 . Si $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ tiene coordenadas $(1, -3, 2)$ respecto de B_1^* , calcular sus coordenadas respecto de B_2^* .
- Hallar una base de $S^\circ \subseteq V^*$ en los siguientes casos:
 - $V = \mathbb{R}^3$ y $S = \langle (1, -1, 2), (2, 1, 3), (1, 5, 0) \rangle$
 - $V = \mathbb{R}^4$ y $S = \langle (1, 1, -1, 1), (2, -1, 3, 1) \rangle$
 - $V = \mathbb{R}^3$ y $S = \left\{ (x_1, x_2, x_3) / \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2.x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\}$

$$d) \quad V = \mathbb{R}^4 \text{ y } S = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) / \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2.x_1 + x_2 - 2.x_3 + 3.x_4 = 0 \\ 4.x_1 - x_2 + 5.x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

- Sea $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ y sea $W = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / A.B = 0\}$.

Sea $f \in W^\circ$ tal que $f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ y $f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$. Calcular $f(B)$.

- Para los siguientes subespacios S y T de V , determinar una base de $(S + T)^\circ$ y una base de $(S \cap T)^\circ$
 - $V = \mathbb{R}^4$, $S = \langle (1, 1, -1, 1), (2, -1, 3, 1) \rangle$, $T = \langle (2, -4, 8, 0), (-1, 1, 2, 3) \rangle$
 - $V = \mathbb{R}^4$, $S = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) / \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$, $T = \langle (2, 1, 3, 1) \rangle$
 - $V = \mathbb{R}^3$, $S = \left\{ (x_1, x_2, x_3) / \begin{cases} x_1 - 2.x_2 + x_3 = 0 \\ 3.x_2 - 2.x_3 = 0 \end{cases} \right\}$,
 $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / 2.x_1 - x_2 = 0\}$

11. Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión finita y sean S y T subespacios tales que $V = S \oplus T$. Probar que $V^* = S^\circ \oplus T^\circ$.

12. Sea V un \mathbb{Z}_p -espacio vectorial de dimensión n (p es un primo, luego \mathbb{Z}_p es un cuerpo). Probar que

$$\#\{S \subseteq V \text{ subespacio} / \dim(S) = 1\} = \#\{S \subseteq V \text{ subespacio} / \dim(S) = n - 1\}$$

Calcular dicho número.

13. Sea $tr : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$ la forma lineal traza y dado $a \in \mathbb{K}^{n \times n}$ se define $f_a : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$ como $f_a(x) = tr(ax)$.

a) Probar que $f_a \in (\mathbb{K}^{n \times n})^* \forall a \in \mathbb{K}^{n \times n}$

b) Probar que $f_a(x) = 0 \forall x \in \mathbb{K}^{n \times n} \Rightarrow a = 0$

c) Se define $\gamma : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow (\mathbb{K}^{n \times n})^*$ como $\gamma(a) = f_a$ Probar que γ es un isomorfismo.

d) Sea $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 3.a_{11} - 2.a_{12} + 5.a_{22}$$

Encontrar una matriz $a \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / \gamma(a) = f$.

14. Sea $\varphi \in (\mathbb{K}^{n \times n})^*$ tal que $\varphi(a.b) = \varphi(b.a) \forall a, b \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Probar que

$$\exists \alpha \in \mathbb{K} / \varphi = \alpha.tr$$

Deducir que si $\varphi(a.b) = \varphi(b.a) \forall a, b \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y $\varphi(I_n) = n$ entonces $\varphi = tr$.

15. Sean $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}, \alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$. Para cada $i, 0 \leq i \leq n$ se define $\epsilon_{\alpha_i} : \mathbb{K}_{<n+1}[X] \rightarrow \mathbb{K}$ como $\epsilon_{\alpha_i}(P) = P(\alpha_i)$

a) Probar que $B' = \{\epsilon_{\alpha_0}, \dots, \epsilon_{\alpha_n}\}$ es una base de $(\mathbb{K}_{<n+1}[X])^*$

b) Sea $B = \{P_0, \dots, P_n\}$ la base de $\mathbb{K}_{<n+1}[X]$ tal que $B^* = B'$. Probar que el polinomio

$$P = \sum_{i=0}^n \beta_i.P_i$$

es el único polinomio en $\mathbb{K}[X]$ de grado menor o igual que n tal que, $\forall i, 0 \leq i \leq n, P(\alpha_i) = \beta_i$. Este polinomio se llama el **polinomio interpolador de Lagrange**.

c) Probar que existen números reales a_0, \dots, a_n tales que, para todo $P \in \mathbb{K}_{<n+1}[X]$,

$$\int_0^1 P(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i.P(\alpha_i).$$

Hallar a_0, a_1 y a_2 en el caso en que $n = 2, \alpha_0 = 1, \alpha_1 = \frac{1}{2}$ y $\alpha_2 = 0$.

16. Sean $V = \mathbb{R}^2$ y $W = \mathbb{R}^3$ y sea $f(x_1, x_2) = (2.x_1 - x_2, 3x_1, x_1 - 2.x_2)$. Si $B_1 = \{(1, 2), (1, 3)\}$ y $B_2 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$, calcular $\|f^t\|_{B_2^* B_1^*}$.

17. Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión finita, sea $T : V \rightarrow V$ lineal y sea $c \in \mathbb{K}$. Supongamos que existe $v \in V$ no nulo tal que $T(v) = cv$. Probar que existe $f \in V^*$ no nula tal que $T^t(f) = cf$.

18. Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión finita y $L : V \rightarrow V^{**}$ el isomorfismo natural que identifica a V con su doble dual. Sea S un subconjunto de V y sea $S^{\circ\circ} = (S^\circ)^\circ \subseteq V^{**}$. ¿Qué relación hay entre $L(S)$ y $S^{\circ\circ}$?

19. Sea S un conjunto y sea \mathbb{K}^S el \mathbb{K} -espacio vectorial de las funciones de S en \mathbb{K} con las operaciones naturales. Sea W un subespacio de dimensión n de \mathbb{K}^S . Demostrar que existen puntos x_1, \dots, x_n en S y funciones f_1, \dots, f_n en W tal que $f_i(x_j) = \delta_{ij}$.