

ALGEBRA LINEAL

PRACTICA 1. METODO DE GAUSS, OPERACIONES ELEMENTALES.**Matrices escalonadas**

Una matriz es *escalonada* si verifica lo siguiente:

- 1) El primer coeficiente no nulo de cada fila es 1, y se llama el *pivote* de la fila.
- 2) El pivote de cada fila (a partir de la segunda) se encuentra estrictamente mas lejos (es decir, en una columna de indice estrictamente mayor) que el pivote de la fila anterior.
- 3) Puede tener abajo un cierto numero de filas nulas.
- 4) Una matriz escalonada se dice *reducida* si la columna arriba de cada pivote tambien es de ceros.

Observar que en una matriz escalonada de n columnas y k pivotes, las primeras k filas son independientes (y son las unicas no nulas). Hay k columnas que tienen pivote, son independientes, y generan todas las columnas. Hay $n - k$ columnas que no tienen pivote.

Toda matriz puede llevarse por operaciones elementales de filas a la forma escalonada. El algoritmo para hacerlo se llama metodo de Gauss o del "pivote".

Una matriz *ampliada* es simplemente una matriz dividida en dos bloques ($A|B$).

Sistemas de ecuaciones lineales

El conjunto S de soluciones de un sistema lineal homogeneo con n variables es un subespacio del espacio K^n . Resolver el sistema homogeneo consiste en hallar una base para S . Toda solucion sera entonces combinacion lineal de las soluciones de la base.

El conjunto de soluciones A de un sistema no homogeneo es un trasladado $A = p_0 + S$ del conjunto de soluciones S del sistema homogeneo correspondiente, donde p_0 es una solucion particular cualquiera. Resolver el sistema consiste en hallar p_0 y en resolver el sistema homogeneo.

METODO PARA RESOLVER SISTEMAS LINEALES:

Los sistemas lineales tienen una matriz ampliada asociada, por ejemplo, la matriz asociada al sistema en el ejercicio 1. iii) aqui abajo es la siguiente:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

Asi, las filas corresponden a las ecuaciones, las columnas corresponden a las variables, y la columna ampliada a los terminos independientes.

Si se aplican operaciones elementales de filas, la matriz resultante corresponde a un sistema que tiene el mismo conjunto de soluciones.

COROLARIO (del metodo de Gauss): Dado cualquier sistema lineal, existe un sistema lineal escalonado (es decir, cuya matriz es escalonada) que tiene el mismo conjunto de soluciones.

El conjunto de soluciones de un sistema homogéneo escalonado de m ecuaciones (y n variables) tiene dimensión $n - m$, y una base se encuentra inmediatamente.

El metodo para resolver sistemas es llevarlos a la forma escalonada. Los sistemas se resuelven por medio del siguiente ALGORITMO:

Supongamos n variables con m ecuaciones:

- 1) Se escribe la matriz ampliada asociada (A, b) .
- 2) Por medio del metodo de Gauss aplicado a la matriz ampliada se lleva la parte A a la forma escalonada, que tendrá $k \leq m$ pivotes (aparecen filas nulas abajo si $k < m$).
- 3) Las variables correspondientes a las $n - k$ columnas sin pivote se pasan al otro lado, y se piensan como parametros independientes. Así, el espacio de soluciones del sistema homogéneo tendrá dimensión $n - k$.
- 4) Se resuelve el sistema escalonado empezando desde abajo (si a la columna ampliada le queda un número no nulo debajo de la fila k , el sistema no tiene soluciones).
- 5) Notar que esta última parte es equivalente a continuar fabricando ceros, ahora arriba de cada pivote, quedando así una matriz escalonada reducida, cuyo sistema "ya está resuelto". Se tiene así la solución general (en termino de los parametros).
- 6) Dándole el valor cero a todos los parametros se obtiene una solución particular p_0 .
- 7) Para obtener $n - k$ soluciones independientes del sistema homogéneo correspondiente se les van dando valores arbitrarios convenientes a los $n - k$ parametros (por ejemplo, un parametro = 1 y todos los demas = 0, y así en forma sucesiva con cada parametro).

El conjunto de soluciones así obtenido es el conjunto de soluciones del sistema original.

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$a) \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases} \quad d) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases} \quad f) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \quad h) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_6 = 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12 \end{cases}$$

2. Resuelva los siguientes sistemas y compare los conjuntos de soluciones:

$$i) \{x+2y-3z=4 \quad \text{ii) } \begin{cases} x+2y-3z=4 \\ x+3y+z=11 \end{cases} \quad \text{iii) } \begin{cases} x+2y-3z=4 \\ x+3y+z=11 \\ 2x+5y-4z=13 \end{cases}$$

3. Para cada uno de los siguientes sistemas lineales homogéneos, determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema tiene alguna solución no trivial:

$$i) \begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ (k+1)x_2 + x_3 = 0 \\ (k^2 - 4)x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + kx_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$$

4. Dado el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = \alpha_1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = \alpha_2 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = \alpha_3 \end{cases}$$

Determinar los valores de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema admite solución.

5. Determinar para qué valores de a y b en \mathbb{R} cada uno de los siguientes sistemas tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones:

$$i) \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = b \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = -1 \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} ax_1 + 2x_2 + ax_3 = 1 \\ ax_1 + (a+4)x_2 + 3ax_3 = -2 \\ -ax_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ (a+2)x_2 + (3a+1)x_3 = b \end{cases}$$

6. (i) Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}$$

Probar que el sistema homogéneo correspondiente tiene solución única si y sólo si a, b, c y d no son todos iguales a cero.

(ii) Analizar la validez de la afirmación anterior si $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$.

7. Encuentre un sistema con coeficientes reales cuya solución general sea

$$\{(1, 1, 0) + \lambda(1, 2, 1) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}\}$$