ALGEBRA LINEAL

PRACTICA 3, MATRICES.

1. Encuentre un contraejemplo para cada uno de las siguiente afirmaciones relativas al producto de matrices:

   (i) $AB = BA$

   (ii) $(AB)^2 = A^2B^2$

   (iii) $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$

   (iv) $AB = AC$ y $\mathrm{A} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{B} = \mathrm{C}$

   (v) $AB = 0 \Rightarrow BA = 0$

   (vi) $A^j = 0 \Rightarrow A = 0$

   (vii) $A^2 = A \Rightarrow A = 0$ ó $A = I$

2. Caracterizar el conjunto $\{A \in \mathbb{K}^{3\times3} / \, AB = BA \;\; \forall B \in \mathbb{K}^{3\times3}\}$.

3. Calcular:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \qquad \begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}^n$$

4. Resolver las ecuaciones matriciales en el cuerpo $\mathbb{R}$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

5. En cada uno de los siguientes casos, hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ que verifique:

   (i) $A \neq I$ y $A^3 = I$

   (ii) $A \neq 0$; $A \neq I$ y $A^2 = A$

6. Mostrar, en cada uno de los siguientes casos, una matriz A con coeficientes reales de manera que el sistema $Ax = b$ cumpla:

   (i) No tiene solución o tiene solución única, dependiendo del valor de b.

   (ii) Tiene infinitas soluciones, independientemente del valor de b.

   (iii) No tiene solución o tiene infinitas soluciones, dependiendo del valor de b.

   (iv) Tiene solución única, independientemente del valor de b.

7. El rango de una matriz escalonada es igual a su numero de filas no nulas. El algoritmo de Gauss no modifica el rango de una matriz. Calcular el rango de las siguientes matrices, por ejemplo, llevandolas a la forma escalonada.

$$\text{i)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ii)} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad iii) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{iv)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{v)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad vi) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Calcular el rango de $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ para cada $k \in \mathbb{R}$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix}$$

9. Sean $A \in K^{m\times n}$ y $b \in K^m$. Se considera el sistema $Ax = b$ y sea $(A\,|\,b)$ su matriz ampliada. Probar que $Ax = b$ tiene solución $\iff \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A\,|\,b)$.

10. **Matrices elementales** Las matrices elementales son el resultado de aplicarle una operacion elemental a la matriz identidad I.
   (i) Calcular todas las matrices elementales de $K^{3\times 3}$.
   (ii) Las matrices elementales son inversibles.
   (iii) Calcular el determinante de las matrices elementales.
   (iv) Sea α una operacion elemental de filas, β una operacion elemental de columnas, $P = \alpha(I)$ y $Q = \beta(I)$ las correspondientes matrices elementales. Dada una matriz A, verificar, demostrar o convencerse que se tiene $\alpha(A) = PA$, es decir, $\alpha(A) = \alpha(I)A$, y $\beta(A) = AQ$, es decir, $\beta(A) = A\beta(I)$.
   (v) Deducir que si B proviene de A luego de una aplicacion sucesiva de operaciones elementales de filas y de columnas, se tiene $B = PAQ$, donde P resulta de aplicarle las operaciones de fila a I, y Q resulta de aplicarle las operaciones de columna a I.
   (vi) Las matrices P, Q en el item anterior son inversibles.

11. Para las siguientes matrices A, B sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ decidir si existen matrices inversibles P, Q tales que $B = PAQ$, y en caso afirmativo hallarlas.

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad d)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$e)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

12. **Metodo algoritmico para calcular la inversa de una matriz.** Dada una matriz A, su inversa se calcula eficientemente con el siguiente ALGORITMO:

    1) Formar la matriz ampliada $(A\,|I)$.

    2) Operando sobre la matriz ampliada llevar por el metodo de Gauss el bloque A a la forma escalonada. Si aparece una columna sin pivote, la matriz no es inversible.

    3) Continuar fabricando ceros, ahora arriba de la diagonal, hasta obtener una matriz de la forma $(I\,|B)$.

    Por el ejercicio 10. se tiene que $BA = I$, con B inversible, de donde se sigue que B es la inversa de A.

13. **Otro metodo para calcular la inversa de una matriz.** Enfrentado a una matriz A, en la mayoria de los casos su inversa puede calcularse mas rapido pero con mas riesgo de la siguiente forma (que no es un algoritmo, y por lo tanto hay que pensar, actividad que a veces es preferible evitar).

    1) Formar la matriz ampliada $(I\,|A\,|I)$.

    2) Ir fabricando ceros en el bloque del centro hasta llegar a la matriz identidad I. Para ello, observarlo bien, y astutamente decidirse por una operacion, ya sea de fila o de columna. Si se realiza una operacion de fila, hacer la misma operacion en el bloque izquierdo, y dejar el derecho como esta. Si se realiza una operacion de columna, hacer la misma operacion en el bloque derecho, y dejar el izquierdo como esta.

    3) Con un poco de suerte, se termina obteniendo una matriz de la forma $(P\,|I\,|Q)$.

    Por el ejercicio 10. se tiene que $PAQ = I$, con P y Q inversibles, de donde se sigue que $B = QP$ es la inversa de A.

14. Decidir si las siguientes matrices son inversibles y, en caso afirmativo, exhibir sus inversas:

$$a)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad d)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e)\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad g)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad h)\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad i)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$j)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\qquad k)\begin{pmatrix}2&1&0&0\\3&2&0&0\\1&1&3&4\\2&-1&2&3\end{pmatrix}\qquad l)\begin{pmatrix}-1&1&6&5\\1&1&2&3\\-1&2&5&4\\2&1&0&1\end{pmatrix}$$

15. Sea A nilpotente ($A^n = 0$). Demostrar que $I - A$ es inversible.
(pista: recordar la serie de $\frac{1}{1-x}$).

16. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Probar:

    (i) Si A es inversible entonces $AB = 0 \Rightarrow B = 0$ y $AB = AC \Rightarrow B = C$

    (ii) Si A no es inversible, existe $B \neq 0, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que $AB = 0$.

    (iii) A, B inversibles $\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

17. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar:

    (i) $A\,,\, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversibles $\Rightarrow A + B$ es inversible

    (ii) A inversible $\iff$ A^t inversible.

    (iii) A nilpotente (es decir, $\exists j \in \mathbb{N}\ /\ A^j = 0$) $\Rightarrow A$ no es inversible.

    Nota: Dada $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, se llama **matriz transpuesta de** A a la matriz $A^t \in \mathbb{K}^{n\times n}$ definida por $(A^t)_{ij} := (A)_{ji}, \forall\, 1 \leq i, j \leq n$.

Resolucion de sistemas e inversa de matrices por el metodo de Cramer

18. Calcular el determinante, la adjunta y la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$\text{i)}\begin{pmatrix}2&3\\5&1\end{pmatrix}\qquad \text{ii)}\begin{pmatrix}2&-3&3\\-5&4&0\\0&-2&2\end{pmatrix}\qquad \text{iii)}\begin{pmatrix}-1&1&6&5\\1&1&2&3\\-1&2&5&4\\2&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\text{iv)}\begin{pmatrix}\cos\theta&-\operatorname{sen}\theta&0\\\operatorname{sen}\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad \text{v)}\begin{pmatrix}\cos\theta&0&-\operatorname{sen}\theta\\0&1&0\\\operatorname{sen}\theta&0&\cos\theta\end{pmatrix}$$

19. Sea A una matriz inversible. Calcular $\det\big(\operatorname{adj} A\big)$ Qué pasa si A no es inversible?

20. Resolver los siguientes sistemas lineales sobre $\mathbb{R}$ empleando la regla de Cramer:

$$\text{i)}\left\{\begin{array}{rcl}3x_1 - x_2 &=& -3\\ x_1 + 7x_2 &=& 4\end{array}\right. \quad \text{ii)}\left\{\begin{array}{rcl}3x_1 - 2x_2 + x_3 &=& 0\\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &=& 1\\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &=& 2\end{array}\right. \quad \text{iii)}\left\{\begin{array}{rcl}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &=& 0\\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 &=& 1\\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &=& 4\\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 &=& 0\end{array}\right.$$