Curso de Verano 2004

Algebra Lineal

Práctica 4: Espacios vectoriales

1. Probar en cada caso que el conjunto V, con la suma y el producto por escalares definidos, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$:

   (i) $V = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)/a_i \in \mathbb{K}\ \forall\, i \in \mathbb{N}\}$, el conjunto de todas las sucesiones de elementos de $\mathbb{K}$.

   a. $+ : (a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}}$

   b. $. : k.(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (k.a_i)_{i\in\mathbb{N}}$

   (ii) Dado X un conjunto, sea $V = \mathbb{K}^X = \{f : X \to \mathbb{K}$ tal que f es una función$\}$.

   a. $+ : (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall\, x \in X$

   b. $. : (k.f)(x) = k.f(x) \quad \forall\, x \in X$

2. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios de V como $\mathbb{K}$-espacio vectorial:

   (i) $S_1 = \{v \in \mathbb{R}^3/v = a(1, 0, 0) + b(1, 1, 1)\,;\, a, b \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

   (ii) $S_2 = \{ai/a \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

   (iii) $S_3 = \{f \in \mathbb{K}[X]/f = 0$ ó $\mathrm{gr} f \geq 2\}$, $V = \mathbb{K}[X]$

   (iv) $S_4 = \{f \in \mathbb{K}[X]/f = 0$ ó $\mathrm{gr} f \leq 5\}$, $V = \mathbb{K}[X]$

   (v) $S_5 = \{M \in \mathbb{K}^{4\times4} \,/\, M^t = M\}$, $V = \mathbb{K}^{4\times4}$

   (vi) $S_6 = \{M \in \mathbb{K}^{3\times3} \,/\, \mathrm{tr}(M) = 0\}$, $V = \mathbb{K}^{3\times3}$

   (vii) $S_7 = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

   (viii) $S_8 = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \,/\, f''(1) = f(2)\}$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

   (ix) Dados a y $b \in \mathbb{R}$ fijos, $S_9 = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \,/\, f'' + af' + bf = 0\}$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

   (x) $S_{10} = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \,/\, \int_0^1 f(x)dx = 0\}$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

   (xi) $S_{11} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}/\,\exists\, k \in \mathbb{N}$ tal que $a_r = 0\ \forall\, r \geq k\}$, $V = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

3. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$:

   (i) $\mathbb{K}^n$

   (ii) $\mathbb{K}_n[X] = \{f \in \mathbb{K}[X] \,/\, f = 0$ ó $\mathrm{gr}(f) \leq n\}$

   (iii) $\mathbb{K}[X]$

(iv) $\mathbb{K}^{n\times n}$

(v) $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

(vi) $S_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,x+y-z=0\ ;\ x-y=0\}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

(vii) $S_2=\{A\in\mathbb{R}^{3\times 3}\,/\,A=-A^t\}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

(viii) $S_3=\{f\in\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]\,/\,f(1)=0$ y $f(2)=f(3)\}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

(ix) $S_4=\{f\in C^\infty(\mathbb{R})\,/\,f'''=0\}$, $\mathrm{K}=\mathbb{R}$

4. Sea $S=S((1,-1,2,1),(3,1,0,-1),(1,1,-1,-1))\ \subseteq\mathbb{R}^4$.

   (i) Determinar si $(2,1,3,5)\in S$

   (ii) Determinar si $S\subseteq\{x\in\mathbb{R}^4/x_1-x_2-x_3=0\}$

   (iii) Determinar si $\{x\in\mathbb{R}^4/x_1-x_2-x_3=0\}\subseteq S$

   (iv) Encontrar ecuaciones implicitas para S.

5. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean v_1 , v_2 , v_3 $\in$ V.
   Probar que si $v_1+3v_2-v_3=0=2v_1-v_2-v_3$ entonces $S(v_1\,,\,v_2\,,\,v_3)=S(v_3)$.

6. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas:

   (i) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean v , w $\in$ V. Entonces $S(v\,,\,w)=S(v\,,\,w+5v)$

   (ii) Sean v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , w $\in\mathbb{R}^7$ tales que $S(v_1\,,\,v_2\,,\,w)=S(v_3\,,\,v_4\,,\,w)$.
   Entonces $S(v_1\,,\,v_2)=S(v_3\,,\,v_4)$

   (iii) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean v_1 , v_2 , v_3 , w $\in$ V.
   $S(v_1\,,\,v_2\,,\,v_3\,,\,w)=S(v_1\,,\,v_2\,,\,v_3)\iff w\in S(v_1\,,\,v_2\,,\,v_3)$

7. Probar que $\{f\in C^\infty(\mathbb{R})\,/\,f''+f=0\}=S(\mathrm{sen}x\,,\,\cos x)$.

   (Sugerencia: Probar que si $f''+f=0$, entonces $\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})\mathrm{sen}x}{\cos x}$ es una función constante en el intervalo $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.)

8. Decidir si las siguientes sucesiones de vectores son linealmente independientes sobre $\mathbb{K}$:

   (i) $(1,2,3)$, $(2,3,1)$, $(1,1,4)$, $(5,1,1)$ en $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

   (ii) $(1-i,i)$, $(2,-1+i)$ en $\mathbb{C}^2$ para $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ y $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

   (iii) $(3+\sqrt{2}\,,1+\sqrt{2})$, $(7,\ 1+2\sqrt{2})$ en $\mathbb{R}^2$, para $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$ y $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

   (iv) $(1-X)^3$, $(1-X)^2$, $1-X$, 1 en $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$

   (v) $f(x)=\mathrm{sen}x$, $g(x)=\cos x$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

(vi) $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, $h(x) = e^{-x}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

(vii) $u = (1, 0, 1, 0, 1, \dots)$, $v = (0, 1, 0, 1, 0, \dots)$, $w = (1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots)$ en $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

9. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ es un conjunto linealmente independiente:

   (i) $\{(1, 2, k) , (1, 1, 1) , (0, 1, 1-k)\}$

   (ii) $\{(k, 1, 0) , (3, -1, 2) , (k, 2, -2)\}$

10. Hallar una base y la dimensión de los siguientes $\mathbb{K}$-espacios vectoriales

   (i) $S((1, 4, -2, 1) , (1, -3, -1, 2) , (3, -8, -2, 7))$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

   (ii) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

   (iii) $\mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

   (iv) $\{f \in \mathbb{R}[X] \,/\, f = 0$ ó $\mathrm{gr}(f) \leq 3$ y $f(2) = f(-1)\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

   (v) $\{f \in \mathbb{R}[X] \,/\, f = 0$ ó $\mathrm{gr}(f) \leq 3$ y f es un múltiplo de $(x^2 - 2)\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

   (vi) $\{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \,/\, a_i = a_j \;\forall\, i, j\}$

11. (i) Probar que el conjunto $\{(1, 0, 0) , (0, i, 0) , (1, 1, i)\}$ es base de $\mathbb{C}^3$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial pero no como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Calcular la dimensión de $\mathbb{C}^3$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

   (ii) Probar que el conjunto $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial pero no como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

   (iii) Probar que $\{e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. ¿Cuál es la dimensión de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial?

12. Completar los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V indicado:

   (i) $\{(1, 1, 1, 1) , (0, 2, 1, 1)\}$, V $= \mathbb{R}^4$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

   (ii) $\{X^3 - 2X + 1 , X^3 + 3X\}$, V $= \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

   (iii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, V $= \mathbb{C}^{2\times 2}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

13. Extraer una base de S de cada uno de los siguientes sistemas de generadores:

   (i) S $= S((1, 1, 2) , (1, 3, 5) , (1, 1, 4) , (5, 1, 1)) \subseteq \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

(ii) S $= S(X^2+2X+1\,,\ X^2+3X+1\,,\ X+2) \subseteq \mathbb{R}[X]$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

(iii) S $= S(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix}0 & i\\ 1 & 1\end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix}0 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}) \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ y $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

14. Hallar la dimensión del $\mathbb{R}$-espacio vectorial S para cada $k \in \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

    (i) S $= S((1,k,1)\,,\ (-1,k,1)\,,\ (0,1,k)) \ \subset \mathbb{R}^3$

    (ii) S $= S(\begin{pmatrix}1 & k\\ -1 & 2\end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix}k & 1\\ 0 & 2k\end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}) \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$

    (iii) S $= \{x \in \mathbb{R}^3 / Ax = 0\}$ siendo $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$A = \begin{pmatrix}1 & -k & -1\\ -1 & 1 & k^2\\ 1 & k & k-2\end{pmatrix}$$

15. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales
$$S((-2,1,6),(3,0,-8)) = S((1,k,2k),(-1,-1,k^2-2),(1,1,k)).$$

16. En cada uno de los siguientes casos caracterizar los subespacios $S\cap T$ y $S+T$ de V. Determinar si la suma es directa:

    (i) V $= \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z)/3x-2y+z=0\}$ y $T = \{(x,y,z)/x+z=0\}$

    (ii) V $= \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z)/3x-2y+z=0\,,\ x-y=0\}$ y $T = S((1,1,0),(5,7,3))$

    (iii) V $= \mathbb{R}^3$, $S = S((1,1,3),(1,3,5),(6,12,24))$ y $T = S((1,1,0),(3,2,1))$

    (iv) V $= \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X]/f(1)=0\}$ y $T = S(1\,,\ X\,,\ X^2\,,\ X^3+2X^2-X\,,\ X^5)$

    (v) V $= \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X]/f(0)=0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}[X]/f'(0)=f''(0)=0\}$

17. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $S \cap T = S((0,1,1))$, siendo

    $S = \{x \in \mathbb{R}^3/x_1+x_2-x_3=0\}$ y $T = S((1,k,2),(-1,2,k))$.

18. (i) Sean $S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,/\, f(0)=0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,/\, f$ es constante$\}$. Probar que S y T son subespacios de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y que $S \oplus T = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

    (ii) Sean $S = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \,/\, A = A^t\}$ y $T = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \,/\, A = -A^t\}$ (los elementos de S se llaman *matrices simétricas* y los de T, *matrices antisimétricas*). Probar que S y T son subespacios de $\mathbb{K}^{n\times n}$ y $S \oplus T = \mathbb{K}^{n\times n}$.

19. Para cada S dado hallar T $\subseteq$ V tal que S $\oplus$ T $=$ V (en este caso, T se dice un *suplemento* de S con respecto a V):

(i) $\mathrm{S} = S((1,2,-1,3)\,,\,(2,3,-2,1)\,,\,(0,1,0,7))\ ,\ \mathrm{V} = \mathbb{R}^4$

(ii) $\mathrm{S} = \{A \in \mathbb{R}^{4\times4} \,/\, \operatorname{tr}(A) = 0\}\ ,\ \mathrm{V} = \mathbb{R}^{4\times4}$

(iii) $\mathrm{S} = S(3, 1+X^2)\ ,\ \mathrm{V} = \mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$

20. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar:

    (i) S, T subespacios de $\mathbb{R}^3$, dim S = dim T = 2 $\Rightarrow \exists v \neq 0$ tal que $v \in \mathrm{S} \cap \mathrm{T}$

    (ii) S, T, W subespacios de $\mathbb{R}^5$, dim S = dim T = dim W = 2 $\Rightarrow$ dim $(\mathrm{S} \cap \mathrm{T} \cap \mathrm{W}) \geq 1$

21. Sean
    $S = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,/\, f(x) = f(-x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,\}$ (*funciones pares*) y
    $T = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,/\, f(-x) = -f(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,\}$ (*funciones impares*).
    Probar que S y T son subespacios de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y $S \oplus T = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

22. Explicar por que $det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 0$ es una ecuacion implicita para $S((1,\ 2,\ 1),\ (2,\ 0,\ 1))$.

23. Se considera el espacio vectorial $V \subset \mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$, $V = S(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{6})$.

    a) Usando un argumento de dimension probar que existe un polinomio $p(x) \in \mathbb{Q}[X]$ de grado ≤ 4 que se anula en el punto $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

    b) Hallar p que cumpla a).

    c) Calcular la dimension de V sobre $\mathbb{Q}$.