Curso de Verano 2004

Algebra Lineal

Práctica 7: Espacios euclideos

1. Determinar si las siguientes funciones son o no productos internos. En caso afirmativo encontrar su matriz en la base canónica.

   (i) $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + 3.x_2.y_1 - x_2.y_2 + 3.x_1.y_2$

   (ii) $\Phi(x, y) = x_1.y_1 + x_2.y_1 + 2.x_2.y_2 - 3.x_1.y_2$

   (iii) $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + x_2.y_2 - x_1.y_2 - x_2.y_1$

   (iv) $\Phi(x, y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$

2. Sea V un espacio vectorial euclideo. Verificar la siguiente formula polar:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}.||x + y||^2 - \frac{1}{4}.||x - y||^2 \qquad \forall\, x, y \in V$$

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. El criterio de Sylvester para $n = 2$ resulta ser el siguiente enunciado:

   Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x, y) = y.A.x^t$. Φ es un producto interno si y sólo si $A = A^t$, $a_{11} > 0$ y $\det(A) > 0$.

   Demostrarlo sin usar el criterio de Sylvester, es decir, demostrar el criterio en el caso particular $n = 2$. Le encuentra alguna relacion con el ejercicio 14 de la practica 6 ?.

4. Determinar para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$ es

$$\Phi(x, y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + bx_2y_2 + (1 + b)x_3y_3$$

   un producto interno en $\mathbb{R}^3$.

5. Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ el producto interno definido por

$$\Phi(x, y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 6x_2y_2$$

   Encontrar una base de $\mathbb{R}^2$ que sea ortonormal para Φ.

6. En cada uno de los siguientes casos, hallar un producto interno en V para el cual la base B resulte ortonormal.

   (i) $V = \mathbb{R}^2$ y $B = \{(1, 1), (2, -1)\}$

   (ii) $V = \mathbb{R}^3$ y $B = \{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$

7. Probar que las siguientes funciones definen productos internos sobre los espacios vectoriales considerados:

   (i) $\langle , \rangle : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $\langle A, B\rangle = tr(AB^t)$.

   (ii) $\langle , \rangle : C[0, 1] \times C[0, 1] \to \mathbb{R}$, $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx$

(iii) $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\langle x, y\rangle = y^t\, Q^t Q\, x^t$
donde $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz inversible.

8. Restringir el producto interno del item ii) del ejercicio anterior a $\mathbb{R}_n[X]$ y calcular su matriz en la base $B = \{1, X, \ldots, X^n\}$.

9. Hallar el complemento ortogonal de los siguientes subespacios de V:

   (i) $V = \mathbb{R}^3$, $\quad S = S((1, 2, 1))$

      a. Para el producto interno canónico.

      b. Para el producto interno definido por

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1.$$

   (ii) $V = \mathbb{R}^4$, $\quad S = S((1, 1, 0, -1), (-1, 1, 1, 0), (2, -1, 1, 1))$ para el producto interno canónico.

10. (i) Hallar bases ortonormales para los subespacios del ejercicio anterior para cada uno de los productos internos considerados.

    (ii) Hallar el punto de S más cercano a $(0, 1, 1, 0)$. Calcular la distancia de $(0, 1, 1, 0)$ a S.

11. Considerar $\mathbb{R}^4$ con el producto interno canonico. Encontrar la distancia de $v = (1,\ 3,\ -2,\ 0)$ al subespacio S = S((0,-3,-1,5), (4,-1,-3,3))

12. Sea $V = \mathbb{R}_n[X]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx$. Encontrar la distancia de $-x^n$ al subespacio de polinomios de grado $\leq n - 1$.

13. Se considera $\mathbb{C}^{3\times 3}$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = tr(AB^t)$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.

14. Se considera $\mathbb{R}_3[X]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, X, X^2, X^3\}$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S = S(1)$.

15. Se considera $C[-1, 1]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$. Hallar el polinomio de grado menor o igual que 3 más próximo a la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$.

    Sugerencia: Observar que basta considerar el subespacio $S = S(1, x, x^2, x^3, \operatorname{sen}(\pi x))$.

16. Se considera $C[0, \pi]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)dt$.

    (i) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $B = \{1, \cos t, \operatorname{sen} t\}$.

    (ii) Sea S el subespacio de $C[0, \pi]$ generado por B. Hallar el elemento de S más próximo a la función $f(x) = x$.

17. Sea $V = \mathbb{R}_2[X]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx$. Encontrar los angulos del triangulo ABC, donde $B = x^2$, $C = 1 - x^2$ y $A = 1$.

18. Se considera $C[0, 1]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx$. Sea $f = x^2 + 1$, $g = \alpha x^2 + 1$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que g sea ortogonal a f. Encontrar α y verificar el teorema de Pitagoras $||f + g||^2 = ||f||^2 + ||g||^2$.