Curso de Verano 2004

Algebra Lineal

Práctica 8: Operadores autoadjuntos y operadores ortogonales

1. i) Sea en $\mathbb{R}^3$ el producto interno $\langle \, , \, \rangle$ definido en la base canónica por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y sea φ la forma lineal definida por $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 3.x_1 - 2.x_2 - 3.x_3$. Hallar $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x) = \langle x, v \rangle$.

ii) Se considera en $\mathbb{R}_3[X]$ el producto interno definido por $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x).q(x)\, dx$. Sea φ la forma lineal definida por $\varphi(p) = p(5)$. Hallar $g \in \mathbb{R}_3[X]$ tal que $\varphi(p) = \langle p, g \rangle$.

2. Calcular f^* para cada una de las transformaciones lineales siguientes:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$

(ii) $B = \{(1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$, $\quad f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad$ y $\quad |f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(iii) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $\quad f(p) = p' \quad$ (donde $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$).

(iv) $\mu_f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $\mu_f(p) = fp$ donde $f \in \mathbb{R}[X]$ y $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$

3. Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimension finita y sea $f : V \to V$ una tranformacion lineal. Probar que $\mathrm{Im}(f^*) = (\mathrm{Nu}\ (f))^{\perp}$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-x - 3y - 2z, 4x + 6y + 2z, -3x - 3y).$$

Hallar un producto interno $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que f sea autoadjunta para $\langle , \rangle$.

5. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$.

ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, simetría respecto de la recta de ecuación $x_1 - x_2 = 0$.

iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, simetría respecto del plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

iv) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ y eje $< (1, 0, 1) >$.

6. Dada la tranformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

decidir si f es una rotación, una simetría o una composición de una rotación y una simetría. Encontrar la rotación, la simetría o ambas.

7. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $|f| = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$.

   i) Probar que f es una rotación.
   ii) Hallar $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ g = f$.

8. Para cada una de las siguientes matrices, verificar que existe una matriz $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal tal que OAO^t sea diagonal y encontrar una:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

9. Encuentre una matriz ortogonal P de cambio de variables que lleva la forma cuadratica a una forma diagonal y clasifique las siguientes cuadricas:

   (i) $3x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3 \;=\; 0$
   (ii) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \;=\; 0$
   (iii) $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 \;=\; 0$
   (iv) $3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3 \;=\; 0$

   Comparar con el ejercicio 7 de la practica 6.

10. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ simétrica con autovalores 3 y 4 y $(3,4)$ el autovector asociado a 3. Hallar un autovector asociado a 4. Hallar A y $\sqrt{A}$.

11. Demostrar que una matriz simétrica real tiene una raíz cúbica simétrica; es decir, si A es simétrica real, existe una simétrica real B tal que $B^3 = A$.

12. Hallar en cada caso una matriz simétrica que verifique:

   (i) $1, 2, -1$ son sus autovalores y tenga algun autovector en $S = \{(x, y, z) : x - y + z = 0\}$.
   (ii) $-1, -1, 3, 0$ son sus autovalores y que algunos de sus autovectores pertenezcan a $S = \{(x, y, z, w) : 2x - y + z + w = 0; x - y - w = 0\}$

13. Consideremos R^3 con el producto interno canonico. Sea

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

   Determinar si existe un transformación autoadjunta $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con un autovalor doble $\lambda = 2$ y tal que:

$$f(S) = S \quad y \quad f(\frac{\sqrt{2}}{2},\, -\frac{\sqrt{2}}{2},\, 0) \;=\; 3(\frac{\sqrt{2}}{2},\, -\frac{\sqrt{2}}{2},\, 0) - (\frac{\sqrt{6}}{6},\, \frac{\sqrt{6}}{6},\, -2\frac{\sqrt{6}}{6})$$

   En caso de que exista hallar una tal f ¿Es única? Encontrar una base ortonormal de autovectores para f ¿Es única?