Curso de Verano 2004

Algebra Lineal

Prácticas 9 y 10 (abreviadas). Polinomios minimal y caracteristico, forma de Jordan:

1. Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz A en cada uno de los siguientes casos:

   (Analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$)

   i)$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ ii)$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ iii)$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$

   iv)$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ v)$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ viii)$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$

2. Sea $A \in K^{n\times n}$.

   (i) Probar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

   (ii) Probar que si A es inversible, entonces 0 no es autovalor de A; y si x es un autovector de A, entonces x es un autovector de A^{-1}.

3. Dadas las matrices $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ y los polinomios $P \in \mathbb{C}[X]$, calcular $P(A)$ para:

   (i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, a) $P = X - 1$, b) $P = X^2 - 1$, c) $P = (X - 1)^2$

   (ii) $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $P = X^3 - iX^2 + 1 + i$

4. Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

   (i) Calcular $A^4 - 4A^3 - A^2 + 2A - 5I_2$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

   (ii) Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (iii) Calcular $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

   (iv) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar a A^{-1} como combinación lineal de A y de I_2.

5. Hallar el polinomio minimal de las siguientes matrices (comparar con el característico):

i) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, iii) $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$, iv) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

v) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, vi) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ix) $\begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, , x) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

6. Para cada una de las matrices A del ejercicio 1, sea U una base de K^n y sea $f : K^n \to K^n$ la tranformación lineal tal que $|f|_U = A$. Decidir si es posible encontrar una base B de K^n tal que $|f|_B$ sea diagonal. En caso afirmativo, calcular $C(U, B)$.

7. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por:

$$f(x, y, z) = (-x - 2y + 6z, 4y, -x - 3y + 4z)$$

   (i) Encontrar una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $|f|_B$ sea diagonal.

   (ii) Calcular $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   (iii) Hallar, si es posible, una matriz $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

8. Sea $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ la transformación lineal definida por:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2, x_3, x_4, x_5, 0)$$

   (i) Hallar, para cada $0 \le i \le 5$, un subespacio S_i de $\mathbb{R}^5$ con $\dim(S_i) = i$ que sea f-invariante.

   (ii) Probar que no existen subespacios propios f-invariantes S y T de $\mathbb{R}^5$ tales que $\mathbb{R}^5 = S \oplus T$.

9. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, y sea $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $f_A(x) = Ax$. Hallar subespacios propios S y T de $\mathbb{R}^3$, f_A-invariantes, tales que $S \oplus T = \mathbb{R}^3$.

Forma de Jordan caso nilpotente

10. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

11. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A \in \mathbb{C}^{9\times 9}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

12. Dadas las matrices A y A' en $K^{6\times 6}$

$$A = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A' = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

(i) Probar que ambas son nilpotentes y que A es semejante a A'.

(ii) Dar bases B y B' de $\mathbb{R}_5[X]$ tales que la matriz de la derivación en la base B sea A y en la base B' sea A'.

(iii) Calcular A^k para cada $k \in \mathbb{N}$.

13. Sea $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ una matriz nilpotente tal que $A^5 \neq 0$ y sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ una base de Jordan para A. Calcular la forma y una base de Jordan para las matrices A^2, A^3, A^4 y A^5.

14. Sean $A_i\,(1 \leq i \leq 6)$ matrices en $\mathbb{C}^{8\times 8}$ nilpotentes tales que $m_{A_i} = X^3 \;\; (1 \leq i \leq 6)$. ¿Es cierto que necesariamente dos de estas matrices son semejantes?

15. Sean $A\,,\, B \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ nilpotentes tales que $m_A = m_B$ y $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$. Probar que A y B son semejantes. ¿Es cierto esto en $\mathbb{C}^{7\times 7}$?

16. Decidir si existe $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ nilpotente tal que $\mathrm{rg}(A) = 6$, $\mathrm{rg}(A^2) = 4$, $\mathrm{rg}(A^3) = 3$, $\mathrm{rg}(A^4) = 1$ y $\mathrm{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

Forma de Jordan caso general

17. Hallar la forma y una base de Jordan de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ en cada uno de los siguientes casos:

$$\begin{pmatrix} 1&1&-1\\ -3&-3&3\\ -2&-2&2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3&0&8\\ 3&-1&6\\ -2&0&-5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -4&2&10\\ -4&3&7\\ -3&1&7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2&8&6\\ -4&10&6\\ 4&-8&-4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1&-1&2\\ 3&-3&6\\ 2&-2&4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1&2&3&4\\ 0&1&2&3\\ 0&0&1&2\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3&1&0&0\\ -4&-1&0&0\\ 7&1&2&1\\ -17&-6&-1&0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3&-1&-10&16\\ 1&1&3&-2\\ 0&0&5&-9\\ 0&0&4&-7 \end{pmatrix}$$

18. Sean $A\,,\, B\ \in\ \mathbb{C}^{5\times 5}$ tales que $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B = (X-1)^3(X-3)^2$ y $m_A = m_B$. Decidir si, necesariamente, A es semejante a B

19. Encontrar todas las formas de Jordan posibles de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ en cada uno de los siguientes casos:

    (i) $\mathcal{X}_A(X) = (X-2)^4(X-3)^2 \quad ; \quad m_A(X) = (X-2)^2(X-3)^2$
    (ii) $\mathcal{X}_A(X) = (X-7)^5 \quad ; \quad m_A(X) = (X-7)^2$
    (iii) $\mathcal{X}_A(X) = (X-2)^7 \quad ; \quad m_A(X) = (X-2)^3$
    (iv) $\mathcal{X}_A(X) = (X-3)^4(X-5)^4 \quad ; \quad m_A(X) = (X-3)^2(X-5)^2$

20. Sea $A \in \mathbb{C}^{15\times 15}$ una matriz con autovalores $\lambda_1,\ \lambda_2$ y λ_3 y que cumple, simultáneamente:
    $\mathrm{rg}(A-\lambda_1 Id) = 13$, $\mathrm{rg}(A-\lambda_1 Id)^2 = 11$, $\mathrm{rg}(A-\lambda_1 Id)^3 = 10$, $\mathrm{rg}(A-\lambda_1 Id)^4 = 10$,
    $\mathrm{rg}(A-\lambda_2 Id) = 13$, $\mathrm{rg}(A-\lambda_2 Id)^2 = 11$, $\mathrm{rg}(A-\lambda_2 Id)^3 = 10$, $\mathrm{rg}(A-\lambda_2 Id)^4 = 9$,
    $\mathrm{rg}(A-\lambda_3 Id) = 13$, $\mathrm{rg}(A-\lambda_3 Id)^2 = 12$, $\mathrm{rg}(A-\lambda_3 Id)^3 = 11$.

    Hallar su forma de Jordan.

21. Sea $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

    Encontrar subespacios de dimensión 1, 2 y 3 que sean A-invariantes.

22. Dada una matriz J, si se descompone $J = D + N$, con D diagonal y N nilpotente tales que $DN = ND$, las potencias de J pueden calcularse usando el binomio de Newton. A su vez, esto permite calcular las potencias de una matriz $A = P^{-1}JP$ semejante a J.

    Sea $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

    (i) Hallar la forma y una base de Jordan para A.
    (ii) Calcular A^n para cada $n \in \mathbb{N}$.

23. Sean $A\,,\, B \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

    Decidir si A y B son semejantes.

24. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Probar que A y A^t son semejantes.