Algebra Lineal

Primer Cuatrimestre 2005

Práctica 2

Transformaciones Lineales y Matrices

(1) Probar que los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{K}^{n\times n}$ y calcular su dimensión.
  (a) $S_1 = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} / A = A^t\}$ (matrices simétricas)
  (b) $S_2 = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} / A = -A^t\}$ (matrices antisimétricas)
  (c) $S_3 = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} / a_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$ (matrices triangulares superiores)
  (d) $S_4 = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} / a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\}$ (matrices diagonales)
  (e) $S_5 = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} / a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ y } a_{11} = a_{22} = ... = a_{nn}\}$ (matrices escalares)
  (f) $S_6 = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} / tr(A) = 0\}$
  (g) $S_7 = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} / a_{ij} = 0 \text{ si } i \leq j\}$ (matrices estrictamente triangulares inferiores)

(2) Sean S_1, S_2, S_3, S_5, S_6 y S_7 los subespacios del ejercicio anterior.
  (a) Probar que $\mathbb{K}^{n\times n} = S_3 \oplus S_7$.
  (b) Probar que, si $2 \neq 0$ en $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^{n\times n} = S_1 \oplus S_2$.
  (c) Probar que, si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, $\mathbb{K}^{n\times n} = S_5 \oplus S_6$.

(3) Sean m , n y $r \in \mathbb{N}$. Probar:
  (a) Si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times r}$ y $C \in \mathbb{K}^{r\times s}$, entonces $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
  (b) Si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B, C \in \mathbb{K}^{n\times r}$, entonces $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
  (c) Si $I_r \in \mathbb{K}^{r\times r}$ denota la matriz identidad y $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, entonces $I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$
  (d) Si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{n\times r}$ con $B = (b_{ij})$, sea $B_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ para $1 \leq j \leq r$ (la columna j-ésima de B), entonces $A \cdot B = (A \cdot B_1 | ... | A \cdot B_r)$ (es decir, $A \cdot (B_j)$ es la columna j-ésima de $(A \cdot B)$).
  (e) Sean A, $A' \in \mathbb{K}^{n\times n}$; B, $B' \in \mathbb{K}^{n\times m}$; C, $C' \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y D, $D' \in \mathbb{K}^{m\times m}$.
  Sea $M, M' \in \mathbb{K}^{(n+m)\times(n+m)}$ definidas por
  $$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$
  Entonces $$M \cdot M' = \begin{pmatrix} A \cdot A' + B \cdot C' & A \cdot B' + B \cdot D' \\ C \cdot A' + D \cdot C' & C \cdot B' + D \cdot D' \end{pmatrix}$$

(4) (a) Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, el producto de matrices en $\mathbb{K}^{n\times n}$ no es conmutativo.
  (b) Caracterizar el conjunto $\{A \in \mathbb{K}^{n\times n} / A \cdot B = B \cdot A \ \forall B \in \mathbb{K}^{n\times n}\}$.
  (c) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Probar que el conjunto S de todas las matrices que conmutan con A es un subespacio de $\mathbb{K}^{n\times n}$. Probar que $I_n \in S$ y que $A^j \in S \ \forall j \in \mathbb{N}$.
  (d) Sea $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonal. Caracterizar el conjunto de todas las matrices $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ que conmutan con B. Considerar primero el caso en que todos los elementos de la diagonal de B sean iguales, luego considerar el caso en que todos los elementos de la diagonal sean distintos entre sí y por último considerar el caso en que algunos de los elementos sean iguales y otros no.
  (e) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ con $n \geq 2$. Probar que el conjunto $\{I_n, A, A^2, A^3, ..., A^{n^2-1}\}$ es linealmente dependiente.
  (f) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre A y $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ para que
  a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
  b) $A^2 - B^2 = (A - B) \cdot (A + B)$
  (g) Probar que si A y $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ no necesariamente vale $A^2 \cdot B^2 = (A \cdot B)^2$

(5) Sean $A, A' \in \mathbb{K}^{m\times n}$; $B \in \mathbb{K}^{n\times r}$; $D, D' \in \mathbb{K}^{n\times n}$; $\alpha \in \mathbb{K}$. Probar:
  (a) $(A + A')^t = A^t + (A')^t$
  (b) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$
  (c) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
  (d) $\mathrm{tr}(D + D') = \mathrm{tr}(D) + \mathrm{tr}(D')$
  (e) $\mathrm{tr}(\alpha D) = \alpha\, \mathrm{tr}(D)$
  (f) $\mathrm{tr}(D \cdot D') = \mathrm{tr}(D' \cdot D)$. (¿Hace falta que las matrices sean cuadradas?)

(6) Sean A y $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$
  (a) Probar que si A y B son triangulares superiores, $A \cdot B$ es triangular superior.
  (b) Probar que si A y B son diagonales, $A \cdot B$ es diagonal.
  (c) Probar que si A es estrictamente triangular superior, $A^n = 0$.

(7) Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$

(a) Probar que $A \cdot A^t$ y $A^t \cdot A$ son simétricas. Encontrar un ejemplo donde $A \cdot A^t \neq A^t \cdot A$.

(b) El producto de dos matrices simétricas, ¿es una matriz simétrica?

(c) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, probar que $A = 0 \iff A \cdot A^t = 0 \iff \mathrm{tr}(A \cdot A^t) = 0$

(8) Sea $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ y $B\,,\ C \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Probar

(a) $A \cdot B = A \cdot C \Rightarrow B = C$

(b) $A \cdot B = 0 \Rightarrow B = 0$

(9) Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa

(a) $A\,,\ B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \Rightarrow A + B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$

(b) $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \iff A^t \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$

(c) $\mathrm{tr}(A) = 0 \Rightarrow A \notin \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$

(d) A nilpotente (es decir, $\exists j \in \mathbb{N}\ /\ A^j = 0$) $\Rightarrow A \notin \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$

(10) (a) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ fija. Probar que el conjunto $G_A = \{B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) / BAB^t = A\}$ es un subgrupo de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ (es decir, $I_n \in G_A$, si $B \in G_A$ entonces $B^{-1} \in G_A$ y si $B, B' \in G_A$ entonces $B \cdot B' \in G_A$).

(b) Definimos $O_n = \{B \in \mathbb{R}^{n\times n} / B \cdot B^t = I_n\}$. Probar que $O_n \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ y es un subgrupo.

(11) Para cada i, j $(1 \le i, j \le n)$, sea $E^{ij} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ la siguiente matriz

$$(E^{ij})_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ i = k \ \text{ y } \ j = l \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Las matrices E^{ij} se llaman **matrices canónicas** de $\mathbb{K}^{n\times n}$.

(a) Si $a \in \mathbb{K} - \{0\}$ y $1 \le i \le n$, se define $M_i(a) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ como

$$M_i(a) = E^{11} + E^{22} + \ldots + a \cdot E^{ii} + E^{(i+1)(i+1)} + \ldots + E^{nn} = I_n + (a-1) \cdot E^{ii}$$

Escribir todas las posibles $M_i(a)$ para $n = 2, 3, 4$ $(a \in \mathbb{K})$

(b) Sean $1 \le i, j \le n$, con $i \neq j$. Se define la matriz $P^{ij} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ como la matriz que se obtiene permutando la fila i con la fila j de la matriz identidad. Comprobar que

$$P^{ij} = I_n - E^{ii} - E^{jj} + E^{ij} + E^{ji}$$

Escribir todas las posibles P^{ij} para $n = 2, 3, 4$. ¿Cuántas son las P^{ij} para n general?

(c) Sean $1 \le i, j \le n$, con $i \neq j$ y $a \in \mathbb{K}$. Se define la matriz $T^{ij}(a) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ como

$$T^{ij}(a) = I_n + a \cdot E^{ij}$$

Escribir todas las posibles $T^{ij}(a)$ para $n = 2, 3, 4$ $(a \in \mathbb{K})$

Las matrices $M_i(a)$, P^{ij} y $T^{ij}(a)$ se llaman **matrices elementales** de $\mathbb{K}^{n\times n}$.

(12) Sean $M_i(a)$, P^{ij} y $T^{ij}(a)$ las matrices elementales de $\mathbb{K}^{n\times n}$. Probar:

(a) $M_i(a) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ con $(M_i(a))^{-1} = M_i(\frac{1}{a})$

(b) $P^{ij} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ con $(P^{ij})^{-1} = P^{ij}$

(c) $T^{ij} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ con $(T^{ij}(a))^{-1} = T^{ij}(-a)$

(13) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $A = (a_{ij})$ y sea F_i $(1 \le i \le n)$ la i-ésima fila de A, es decir, $F_i = (a_{i1}, \ldots, a_{im})$ y $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$. Sean E^{ij} las matrices canónicas y sean $M_i(a)$, P^{ij} y $T^{ij}(a)$ las matrices elementales de $\mathbb{K}^{n\times n}$.

Probar

(a) Si $A' = E^{ij} \cdot A$, entonces $A' = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = (0, \ldots, 0)$ si $k \neq i$ y $F'_i = F_j$.

(b) Si $A' = M_i(a) \cdot A$, entonces $A' = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = F_k$ si $k \neq i$ y $F'_i = a \cdot F_i$.

(c) Si $A' = P^{ij} \cdot A$, entonces $A' = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = F_k$ si $k \notin \{i, j\}$; $F'_i = F_j$ y $F'_j = F_i$.

(d) Si $A' = T^{ij}(a) \cdot A$, entonces $A' = \begin{pmatrix} F_1' \\ \vdots \\ F_n' \end{pmatrix}$ con $F_k' = F_k$ si $k \neq i$ y $F_i' = F_i + a \cdot F_j$.

Notar como conclusión de lo anterior que triangular por filas una matriz es multiplicar a izquierda por varias matrices elementales.

¿Cómo se pueden obtener las matrices elementales a partir de la matriz identidad?

(14) (a) Sea $A = T^{12}(1) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Calcular A^{20} y $20 \cdot A$
(b) Calcular $(P^{ij})^{15}$ y $(P^{ij})^{16}$
(c) Sea $B = M_3(2) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Calcular B^{20} y $20 \cdot B$

(15) Averiguar si las siguientes matrices son inversibles y en caso afirmativo exhibir sus inversas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Escribir las que sean inversibles como producto de matrices elementales.

(16) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y sea $b \in \mathbb{K}^n$
(a) Probar que el sistema $A \cdot x = b$ tiene solución única si y sólo si $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$
(b) Probar que $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ si y sólo si las filas de A son linealmente independientes si y sólo si las columnas de A son linealmente independientes.

(17) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Probar que son equivalentes las siguientes afirmaciones
(a) $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$.
(b) Existe $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ tal que $AB = I_n$.
(c) Existe $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ tal que $BA = I_n$.
(d) La única matriz $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ que verifica $AC = 0$ es $C = 0$.
(e) La única matriz $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ que verifica $CA = 0$ es $C = 0$.

(18) Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales
(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - 3x_1 + \sqrt{2}x_3\, ,\, x_1 - \frac{1}{2}x_2)$
(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2\, ,\, 2x_2\, ,\, 1 + x_1)$
(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 7x_3\, ,\, 0\, ,\, 3x_2 + 2x_3)$
(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2\, ,\, |x_1|)$
(e) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = iz$ (considerando a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.)
(f) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = i \cdot Im(z)$ (considerando a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.)
(g) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$ (como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.)
(h) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$, $f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
(i) $f : \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = (3a_{13} - a_{23}\, ,\, a_{11} + 2a_{22} - a_{23}\, ,\, a_{22} - a_{12})$
(j) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 3}$, $f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$
(k) $f : \mathbb{C}^{2\times 2} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$, $f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \overline{a_{12}} \\ \overline{a_{21}} & a_{22} \end{pmatrix}$ (considerando a $\mathbb{C}^{2\times 2}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.)

(19) Interpretar geométricamente las siguientes aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
(a) $f(x, y) = (x, 0)$
(b) $f(x, y) = (0, y)$
(c) $f(x, y) = (x, -y)$
(d) $f(x, y) = (\frac{1}{2}(x + y), \frac{1}{2}(x + y))$
(e) $f(x, y) = (-y, x)$
(f) $f(x, y) = (x \cdot \cos t - y \cdot \operatorname{sen} t\, ,\, x \cdot \operatorname{sen} t + y \cdot \cos t)$

(20) (a) Encontrar una función $f : V \to V$ (para un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V conveniente) que cumpla $f(v+w) = f(v) + f(w)$ para cualquier par de vectores v , $w \in V$ pero que no sea una transformación lineal.
(b) Encontrar una función $f : V \to V$ (para un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V conveniente) que cumpla $f(k \cdot v) = k \cdot f(v)$ para cualquier escalar $k \in \mathbb{K}$ y cualquier vector $v \in V$ pero que no sea una transformación lineal.

(21) Probar la linealidad de las siguientes aplicaciones:
(a) $\mathrm{tr} : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$
(b) $t : \mathbb{K}^{n\times m} \to \mathbb{K}^{m\times n}$, $t(A) = A^t$
(c) $f : \mathbb{K}^{n\times m} \to \mathbb{K}^{r\times m}$, $f(A) = B \cdot A$ donde $B \in \mathbb{K}^{r\times n}$
(d) $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $D(f) = f'$
(e) $\delta_\alpha : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$, $\delta_\alpha(f) = f(\alpha)$ donde $\alpha \in \mathbb{K}$
(f) $s : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $s(\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}) = (0, a_1, a_2, ..., a_n, ...)$

(22) (a) Probar que existe una única transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (-5, 3)$ y $f(-1, 1) = (5, 2)$. Para dicha f, determinar $f(5, 3)$ y $f(-1, 2)$
(b) ¿Existirá una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (2, 6)$; $f(-1, 1) = (2, 1)$ y $f(2, 7) = (5, 3)$?
(c) Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que $f(1, 0, 1) = (1, 2, 1)$, $f(2, 1, 0) = (2, 1, 0)$, $f(-1, 0, 0) = (1, 2, 1)$, $g(1, 1, 1) = (1, 1, 0)$, $g(2, 2, -1) = (3, -1, 2)$, y $g(3, 2, 1) = (0, 0, 1)$. Determinar si $f = g$.
(d) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales exista una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga $f(1, -1, 1) = (2, a, -1)$, $f(1, -1, 2) = (a^2, -1, 1)$ y $f(1, -1, -2) = (5, -1, -7)$

(23) (a) Calcular bases del núcleo y de la imagen para cada tranformación lineal del ejercicio **??**. Decidir en cada caso si f es epimorfismo, monomorfismo, isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular f^{-1}
(b) Clasificar las transformaciones lineales tr , t , D , δ_α y s del ejercicio **??** en epimorfismos, monomorfismos, isomorfismos o nada.

(24) Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1+x_2, x_1+x_3, 0, 0)$ y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1-x_2, 2x_1-x_2)$. Calcular el núcleo y la imagen de f, de g y de $g \circ f$. Decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

(25) Sean $g : V \to V'$ y f : V$' \to$ V$''$ transformaciones lineales. Probar
(a) $\mathrm{Nu}(g) \subseteq \mathrm{Nu}(f \circ g)$
(b) Si $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$, entonces $\mathrm{Nu}(g) = \mathrm{Nu}(f \circ g)$
(c) $\mathrm{Im}(f \circ g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$
(d) Si $\mathrm{Im}(g) = V'$, entonces $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f)$

(26) (a) Sean S , $T \subset \mathbb{R}^4$ definidos por

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \text{ y } T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/2x_1 + x_4 = 0,\ x_2 - x_3 = 0\}.$$

¿Existe algún isomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(S) = T$?
(b) ¿Existe algún monomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$?
(c) ¿Existe algún epimorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$?
(d) Sean $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1, 0)$ y $v_3 = (1, 1, 1, 1)$. ¿Existe alguna transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathrm{Im}(f)$?

(27) Determinar si existe (y en caso afirmativo hallar) una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que verifique $\mathrm{Im}(f) = S$ y $\mathrm{Nu}(f) = T$ en los siguientes casos
(a) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$, $T =< (1, 2, 1) >$
(b) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 + x_2 = 0\ ,\ x_3 + x_4 = 0\}$, $T =< (1, -2, 1) >$

(28) En cada uno de los siguientes casos encontrar una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifique lo pedido:
(a) $(1, 1, 0) \in \mathrm{Nu}(f)$ y $\dim(\mathrm{Im}(f))= 1$
(b) $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) =< (1, 1, 2) >$
(c) $f \neq 0$ y $\mathrm{Nu}(f) \subseteq \mathrm{Im}(f)$
(d) $f \neq 0$ y $f \circ f = 0$
(e) $f \neq Id$ y $f \circ f = Id$
(f) $\mathrm{Nu}(f) \neq \{0\}$, $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$ y $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$

(29) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n y sea $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V. Se define la aplicación $\alpha_B : V \to \mathbb{K}^n$ de la siguiente manera

$$\text{Si } v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \ , \ \alpha_B(v) = (x_1, ..., x_n)$$

Probar que α_B es un isomorfismo.

Observar que, teniendo en cuenta que la aplicación α_B es tomar coordenadas en la base B, esto nos permite trabajar con coordenadas en una base en el siguiente sentido:

(a) $\{w_1, ..., w_s\}$ es linealmente independiente en $V \iff \{\alpha_B(w_1), ..., \alpha_B(w_s)\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{K}^n$

(b) $\{w_1, ..., w_r\}$ es un sistema de generadores de $V \iff \{\alpha_B(w_1), ..., \alpha_B(w_r)\}$ es un sistema de generadores de $\mathbb{K}^n$

(c) $\{w_1, ..., w_n\}$ es una base de $V \iff \{\alpha_B(w_1), ..., \alpha_B(w_n)\}$ es una base de $\mathbb{K}^n$

(d) Por ejemplo, para decidir si $\{X^2 - X + 1 \ , \ X^2 - 3X + 5 \ , \ 2X^2 + 2X - 3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[X]$, bastará ver si $\{(1, -1, 1) \ , \ (1, -3, 5) \ , \ (2, 2, -3)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, para lo que se puede usar el método de triangulación.

(30) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $f : V \to V$ una transformación lineal. Probar que $f \circ f = f \iff f(v) = v \ \ \forall\, v \in \mathrm{Im}(f)$.

Una transformación lineal que cumple esto se llama **proyector**.

(31) En cada uno de los siguientes casos construir un proyector $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla

(a) $\mathrm{Im}(f) = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

(b) $\mathrm{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

(c) $\mathrm{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3)/3x_1 - x_3 = 0\}$ e $\mathrm{Im}(f) =< (1, 1, 1) >$

(32) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $f : V \to V$ un proyector. Probar

(a) $V = \mathrm{Nu}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$,

(b) $g = id_V - f$ es un proyector con $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Nu}(f)$ y $\mathrm{Nu}(g) = \mathrm{Im}(f)$.

(33) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n y sean S y T subespacios de V tales que $V = S \oplus T$. Probar que existe un único proyector $f : V \to V$ tal que $\mathrm{Nu}(f) = S$ e $\mathrm{Im}(f)= T$.

(34) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $f : V \to V$ una transformación lineal. Se dice que f es nilpotente si $\exists\, s \in \mathbb{N} \,/\, f^s = 0$

(a) Probar que si f es nilpotente, entonces f no es ni monomorfismo ni epimorfismo.

(b) Si V es de dimensión n probar que f es nilpotente $\iff$ $f^n = 0$ (Sugerencia: considerar si las inclusiones $\mathrm{Nu}(f^i) \subseteq \mathrm{Nu}(f^{i+1})$ son estrictas o no).

(c) Sea $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V. Se define la transformación lineal $f : V \to V$ de la siguiente forma:

$$f(v_i) = \begin{cases} v_{i+1} & si\ 1 \leq i \leq n-1 \\ 0 & si\ i = n \end{cases}$$

Probar que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$.

(d) Si $V = \mathbb{R}^n$, para cada i , $2 \leq i \leq n$ construir una transformación lineal nilpotente $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f^i = 0$ y $f^{i-1} \neq 0$.

(35) Sea $S =< (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) > \subseteq \mathbb{R}^4$.

(a) Hallar una transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que $Nu(f) = S$.

(b) Hallar ecuaciones para S (usar el item anterior)

(c) Hallar un sistema de ecuaciones lineales cuyo conjunto de soluciones sea $< (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) > + (0, 1, 1, 2)$.

(36) (a) Sea $S \subseteq \mathbb{K}^n$ el conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo. Encontrar una transformación lineal $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ tal que $Nu(f) = S$.

(b) Sea $T \subseteq \mathbb{K}^n$ el conjunto de soluciones de un sistema lineal no homogéneo. Encontrar una transformación lineal $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ y $x \in \mathbb{K}^n$ tales que $T = f^{-1}(x)$.