

# Algebra Lineal

PRIMER CUATRIMESTRE 2005

## PRÁCTICA 3

CAMBIO DE BASE. MATRICES DE TRANSFORMACIONES LINEALES.

1. Encontrar las coordenadas de  $v \in V$  respecto de la base  $\mathcal{B}$  en los siguientes casos:

- $V = \mathbb{K}^n$ ,  $v = (x_1, \dots, x_n)$  y  $\mathcal{B}$  la base canónica.
- $V = \mathbb{R}^3$ ,  $v = (1, 2, -1)$  y  $\mathcal{B} = \{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$ .
- $V = \mathbb{R}^3$ ,  $v = (1, -1, 2)$  y  $\mathcal{B} = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, 2)\}$ .
- $V = \mathbb{R}^3$ ,  $v = (x_1, x_2, x_3)$  y  $\mathcal{B} = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, 2)\}$ .
- $V = \mathbb{R}_{<4}[X]$ ,  $v = 2X^2 - X^3$  y  $\mathcal{B} = \{3, 1 + X, X^2 + 5, X^3 + X^2\}$ .
- $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , y  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$ .

¿Qué cambia si cambiamos el cuerpo a  $\mathbb{Q}$  ó  $\mathbb{C}$ ? ¿Y si el cuerpo es  $\mathbb{Z}_2$ ?

2. a) Sean  $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$  tales que,  $\forall x \in \mathbb{K}^{n \times 1}$ ,  $A \cdot x = B \cdot x$ . Probar que  $A = B$ .

b) Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  y sean  $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$  bases de  $V$ . Probar que

$$\mathcal{C}(\mathcal{B}, \mathcal{B}'') = \mathcal{C}(\mathcal{B}', \mathcal{B}'') \cdot \mathcal{C}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

c) Deducir que  $\mathcal{C}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$ , con  $\mathcal{C}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1} = \mathcal{C}(\mathcal{B}', \mathcal{B})$ .

3. Calcular  $\mathcal{C}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$  y  $\mathcal{C}(\mathcal{B}', \mathcal{B})$  en los siguientes casos. Calcular las coordenadas de  $v$  en  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$ .

- $V = \mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, 2)\}$ ,  $\mathcal{B}' = \{(-1, 3), (2, 5)\}$ ,  $v = (1, 2)$ .
- $V = \mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ ,  $\mathcal{B}' = \{(-1, 1, 1), (2, 0, 1), (1, -1, 3)\}$ ,  $v = (2, 2, 2)$ .
- $V = \mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ ,  $\mathcal{B}' = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ ,  $v = (2, 2, 2)$ .
- $V = \mathbb{R}_{<3}[X]$ ,  $\mathcal{B} = \{3, 1 + X, X^2\}$ ,  $\mathcal{B}' = \{1, X + 3, X^2 + X\}$ ,  $v = 1 + X - X^2$ .
- $V = \mathbb{R}^4$ ,  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ,  $\mathcal{B}' = \{v_3, v_1, v_4, v_2\}$ ,  $v = \sum_{i=1}^4 i v_i$ .
- $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $\mathcal{B} = \{E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22}\}$ ,  $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$ ,  $v = I_2$ .

4. Sean  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ . Hallar bases  $\mathcal{B}'$  y  $\mathcal{B}''$  tales que  $\mathcal{C}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = M = \mathcal{C}(\mathcal{B}'', \mathcal{B})$ .

5. Sean  $f : V \rightarrow V$  una transformación lineal y  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  bases de  $V$ . Calcular  $\|f\|_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$  en cada uno de los siguientes casos:

- $V = \mathbb{R}^3$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2 + x_3, 5x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 + 4x_3)$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$  la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ .
- $V = \mathbb{R}^3$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2 + x_3, 5x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 + 4x_3)$ ,  $\mathcal{B} = \{(1, 2, 1), (-1, 1, 3), (2, 1, 1)\}$  y  $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0), (1, 2, 3), (-1, 3, 1)\}$ .
- $V = \mathbb{C}^2$ ,  $f(x_1, x_2) = (2x_1 - ix_2, x_1 + x_2)$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$  es la base canónica de  $\mathbb{C}^2$  como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial.
- $V = \mathbb{C}^2$ ,  $f(x_1, x_2) = (2x_1 - ix_2, x_1 + x_2)$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = \{(1, 0), (0, 1), (i, 0), (0, i)\}$  considerando a  $\mathbb{C}^2$  como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial.
- $V = \mathbb{R}_{<5}[X]$ ,  $f(p) = p'$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ .
- $V = \mathbb{R}_{<5}[X]$ ,  $f(p) = p'$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = \{X^4, X^3, X^2, X, 1\}$ .
- $V = \mathbb{R}_{<5}[X]$ ,  $f(p) = p'$ ,  $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ ,  $\mathcal{B}' = \{X^4, X^3, X^2, X, 1\}$ .
- $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $f(A) = A^t$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$  la base canónica de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- $V$  de dimensión  $n$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_n\}$  y  $f(v_i) = \begin{cases} v_{i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq n-1 \\ 0 & \text{si } i = n. \end{cases}$

6. Sea  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  una base de  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$  una base de  $\mathbb{R}^4$ . Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la transformación lineal tal que

$$\|f\|_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

- a) Hallar  $f(3v_1 + 2v_2 - v_3)$  ¿Cuáles son sus coordenadas en la base  $\mathcal{B}'$ ?  
 b) Hallar una base de  $\text{Nu}(f)$  y una base de  $\text{Im}(f)$ .  
 c) Describir el conjunto  $f^{-1}(w_1 - 3w_3 - w_4)$ .

7. Sean  $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$  y  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  las bases canónicas de  $\mathbb{K}^m$  y  $\mathbb{K}^n$  respectivamente. Sea  $L_A : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$  definida por  $L_A(x) = (A \cdot x^t)^t$ . Probar que  $\|L_A\|_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} = A$ .

8. Sean  $V$  y  $W$   $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales y sea  $\text{Hom}(V, W) = \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ es lineal}\}$ .

- a) Probar que  $\text{Hom}(V, W)$  es un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial con las operaciones naturales.  
 b) Si  $\dim V = n$  y  $\dim W = m$ , sean  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$  bases de  $V$  y de  $W$  respectivamente. Sea

$$T : \text{Hom}(V, W) \rightarrow \mathbb{K}^{m \times n}$$

la aplicación definida por  $T(f) = \|f\|_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ . Probar que  $T$  es lineal y que es un isomorfismo. Calcular  $\dim(\text{Hom}(V, W))$ .

9. a) Sean  $V_1, V_2, V_3$   $\mathbb{K}$ -e.v. de dimensión finita con bases  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$  respectivamente. Sea  $f : V_1 \rightarrow V_2$  y  $g : V_2 \rightarrow V_3$ . Probar que

$$\|g \circ f\|_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_3} = \|g\|_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3} \cdot \|f\|_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}.$$

b) Sean  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ,  $B \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$ . Probar que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$(BAB^{-1})^n = BA^nB^{-1}.$$

c) Sean  $V_1, V_2$   $\mathbb{K}$ -e.v.,  $\mathcal{B}_i, \mathcal{B}'_i$  bases de  $V_i$  ( $i = 1, 2$ ). Sea  $f : V_1 \rightarrow V_2$  lineal. Probar que

$$\|f\|_{\mathcal{B}'_1\mathcal{B}'_2} = \mathcal{C}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2) \cdot \|f\|_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} \cdot \mathcal{C}(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1).$$

d) Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -e.v.,  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  bases de  $V$  y  $f \in \text{End}(V) = \text{Hom}(V, V)$ . Probar que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$(\|f\|_{\mathcal{B}'})^n = \|f^n\|_{\mathcal{B}'} = \mathcal{C}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \cdot \|f^n\|_{\mathcal{B}} \cdot \mathcal{C}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = (\mathcal{C}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \cdot \|f\|_{\mathcal{B}} \cdot \mathcal{C}(\mathcal{B}', \mathcal{B}))^n.$$

a) Encontrar, para cada  $n \geq 2$ , una matriz  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tal que  $A \neq \mathbf{1}$  y  $A^n = \mathbf{1}$ .

b) Encontrar, para cada  $n \geq 2$ , una matriz  $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$  tal que  $A \neq \mathbf{1}$  y  $A^n = \mathbf{1}$ .

10. Recordemos, para  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ , la definición de la *traza de A*, dada por  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ . Dado  $V$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimensión finita  $n$  y  $f \in \text{End}(V)$ , definimos  $\text{tr}(f) = \text{tr}(\|f\|_{\mathcal{B}})$ , con  $\mathcal{B}$  una base de  $V$ . Probar que esta definición tiene sentido (es decir, que no depende de la base  $\mathcal{B}$ ). Probar que  $\text{tr} : \text{End}(V) \rightarrow \mathbb{K}$  es lineal.

11. Sean  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ ,  $U = \{v_1 + v_3, v_1 + 2v_2 + v_3, v_2 + v_3\}$  y  $U' = \{w_1, w_2, w_3\}$  bases de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{E}$  la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal tal que

$$\|f\|_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \|f\|_{UU'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinar  $U'$ .

12. Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  y sea  $f : V \rightarrow V$  una transformación lineal tal que  $f^n = 0$  y  $f^{n-1} \neq 0$ . Probar que existe una base  $\mathcal{B}$  de  $V$  tal que

$$(\|f\|_{\mathcal{B}})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j + 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

(Sugerencia: elegir  $v_1 \notin \text{Nu}(f^{n-1})$ ).

13. Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  y sea  $f : V \rightarrow V$  un proyector. Probar que existe una base  $\mathcal{B}$  de  $V$  tal que

$$(\|f\|_{\mathcal{B}})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, i \leq \dim(\text{Im}(f)) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

14. Sean  $V$  y  $W$   $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales,  $\dim V = n$  y  $\dim W = m$  y  $f : V \rightarrow W$  una transformación lineal tal que  $\dim(\text{Im}(f)) = s$ . Probar que existe una base  $\mathcal{B}$  de  $V$  y una base  $\mathcal{B}'$  de  $W$  tal que

$$(\|f\|_{\mathcal{B}\mathcal{B}'})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j; i \leq s \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

15. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + 2x_3, 3x_1 - 2x_2 + x_3)$ .

a) Determinar bases  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$  de  $\mathbb{R}^3$  tales que

$$\|f\|_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Si  $A$  es la matriz de  $f$  en la base canónica, encontrar matrices  $C, D \in GL(3, \mathbb{R})$  tales que

$$CAD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

16. Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Sea  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  y sea  $S = \{x \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot x = 0\}$ . Probar que  $\text{rg}(A) + \dim(S) = n$ . (Esto significa que la dimensión del espacio de soluciones es igual a la cantidad de incógnitas menos la cantidad de ecuaciones independientes)
- b) Sea  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{K}^m$ . Se considera el sistema  $A \cdot x = b$  y sea  $(A|b)$  su matriz ampliada. Probar que  $A \cdot x = b$  tiene solución  $\iff \text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$ .

17. Sean  $A, B \in \mathbb{K}^{n \times m}$ . Probar que son equivalentes:

- a)  $\exists C \in GL(n, \mathbb{K})$ ,  $D \in GL(m, \mathbb{K})$  tales que  $A = CBD$ .
- b) Dadas  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  bases de  $\mathbb{K}^m$  y  $\mathbb{K}^n$  respectivamente,  $\exists f : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$  y bases  $\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2$  bases de  $\mathbb{K}^m$  y  $\mathbb{K}^n$  respectivamente tales que  $\|f\|_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = A$  y  $\|f\|_{\mathcal{B}'_1\mathcal{B}'_2} = B$ .
- c)  $\text{rg}(A) = \text{rg}(C)$ .

18. Sean  $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Probar que son equivalentes:

- a)  $\exists C \in GL(n, \mathbb{K})$  tal que  $A = CAC^{-1}$ .
- b) Dada  $\mathcal{B}$  base de  $\mathbb{K}^n$ ,  $\exists f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  y una base  $\mathcal{B}'$  tales que  $\|f\|_{\mathcal{B}} = A$  y  $\|f\|_{\mathcal{B}'} = B$ . Comparar con el ejercicio anterior.

19. Decidir, en los siguientes casos, si existen matrices  $C, D$  tales que  $A = CBD$ :

$$\begin{array}{ll} a) A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & c) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ b) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} & d) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

En los casos en que tales  $C, D$  existen, ¿se pueden encontrar de manera que  $D = D^{-1}$ ? (Sug: pensar en la traza)