

Álgebra Lineal

PRIMER CUATRIMESTRE 2005

PRÁCTICA 6

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES. DIAGONALIZACION (PRIMERA PARTE).

- (1) Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz A en cada uno de los siguientes casos. Analizar por separado los casos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

$$(i) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad (ii) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad (iii) A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$(iv) A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad (v) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} \quad (vi) A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$(vii) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{R}) \quad (viii) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (ix) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (2) Para cada una de las matrices A del ejercicio anterior, sea U una base de \mathbb{K}^n y sea $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ la transformación lineal tal que $\|f\|_U = A$. Decidir si es posible encontrar una base B de \mathbb{K}^n tal que $\|f\|_B$ sea diagonal. En caso afirmativo, calcular $C(U, B)$.
- (3) Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-x - 2y + 2z, y, -x - 3y - 4z)$$

Encontrar una base B de \mathbb{R}^3 tal que $\|f\|_B$ sea diagonal.

- (4) (a) Sean A, C y $D \in \mathbb{K}^{n \times n}$ tales que $A = DCD^{-1}$. Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A^n = DC^n D^{-1}$.
(b) Calcular

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}^n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

(c) ¿Existe una matriz $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$?

- (5) (a) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$. Determinar todos los a, b y $c \in \mathbb{K}$ para los que A es diagonalizable.

(b) Probar que toda matriz $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ es diagonalizable o bien es semejante a una matriz del tipo $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

- (6) Diagonalizar las matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ encontrando sus autovectores.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sugerencia: no intentar calcular el polinomio característico.

- (7) Se sabe que la matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tiene a $(1, -1)$ como autovector de autovalor $\sqrt{2}$ y, además, $\mathcal{X}_A \in \mathbb{Q}[X]$. Decidir si A es diagonalizable en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. ¿Es A única?
- (8) (a) Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ diagonalizable con $\text{tr}(A) = -4$. Calcular los autovalores de A , sabiendo que los autovalores de $A^2 + 2A$ son $-1, 3$ y 8 .
(b) Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ tal que $\det(A) = 6$; 1 y -2 son autovalores de A y -4 es autovalor de la matriz $A - 3I_4$. Hallar los restantes autovalores de A .
- (9) Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Probar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.
- (10) Sea $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ la transformación lineal derivación. Mostrar que todo número real es un autovalor de δ y exhibir un autovector correspondiente.
- (11) Sea $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ un proyector con $\dim(\text{Im}(f)) = s$. Calcular \mathcal{X}_f . ¿Es f diagonalizable?
- (12) Sea \mathbb{K} un cuerpo incluido en \mathbb{C} y sea $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ un morfismo nilpotente. Calcular \mathcal{X}_f . ¿Es f diagonalizable?

- (13) Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que verifica $A^2 + I_n = 0$. Probar que A es inversible, que no tiene autovalores reales y que n debe ser par.
- (14) Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal tal que $\dim(\text{Im}(f)) = 1$. Probar que f es diagonalizable si y sólo si $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$.
- (15) Sea $D \in \mathbb{K}^{n \times n}$ una matriz inversible y diagonal. Sea $f : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ la transformación lineal definida por $f(A) = D^{-1}AD$. Hallar los autovalores y los autovectores de f y probar que es diagonalizable.
- (16) Sea $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ una transformación lineal. Probar que existe una base B de \mathbb{C}^n tal que $\|f\|_B$ es triangular superior.
- (17) Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ las raíces de \mathcal{X}_A contadas con multiplicidad. Probar que $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ y

$$\text{que } \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

- (18) Sean $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{n \times m}$.

- (a) Probar que las matrices $\begin{pmatrix} A.B & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & B.A \end{pmatrix}$ de $\mathbb{K}^{(m+n) \times (m+n)}$ son semejantes.
- (b) Deducir que, si $n = m$, $\mathcal{X}_{A.B} = \mathcal{X}_{B.A}$