Algebra Lineal

Primer Cuatrimestre 2005

Práctica 8

Forma de Jordan

(1) Dadas las matrices A y A' en $\mathbb{K}^{n\times n}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Probar que ambas son nilpotentes y que A es semejante a A'.
(b) Dar bases B y B' de $\mathbb{R}_{<n-1}[X]$ tal que la matriz de la derivación en la base B sea A y en la base B' sea A'.

(2) ¿Cuántas clases de semejanza hay de matrices en $\mathbb{C}^{8\times 8}$ cuyo minimal es x^3? ¿Y en $\mathbb{R}^{8\times 8}$?

(3) Probar que dos matrices en $\mathbb{C}^{6\times 6}$ nilpotentes con igual polinomio minimal e igual rango son semejantes. ¿Es cierto en $\mathbb{C}^{7\times 7}$?

(4) Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A \in \mathbb{C}^{9\times 9}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

(5) Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \le j \\ 1 & \text{si } i > j \end{cases}$$

(6) Decidir si existen y en caso afirmativo exhibir matrices A tales que
(a) $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$, nilpotente y $(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(A^2), \mathrm{rg}(A^3), \mathrm{rg}(A^4), \mathrm{rg}(A^5)) = (6, 4, 3, 1, 0)$.
(b) $A \in \mathbb{R}^{16\times 16}$, $m_A(X) = X^5$, $(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(A^2), \mathrm{rg}(A^3), \mathrm{rg}(A^4), \mathrm{rg}(A^5)) = (9, 5, 3, 1, 0)$. ¿Cuántas clases de semejanza de matrices hay que verifiquen esto?

(7) Sea $f \in \mathrm{End}(V)$ y $\mathcal{X}_f = \prod_{i=1}^t p_i^{m_i}$ la descomposición de su característico en factores primos. Sea $\widetilde{p}_i = \mathcal{X}_f / p_i^{m_i}$, y considérense polinomios q_i tales que $1 = \sum_{i=1}^t \widetilde{p}_i q_i$. Probar que para cada i, $\widetilde{p}_i(f) q_i(f)$ es un proyector.

(8) Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Factorizar su polinomio característico y escribir el 1 como combinación polinomial de los factores. Encontrar proyectores sobre los espacios $V^p := \{v \in V \mid \exists m : p^m(v) = 0\}$.

(9) Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, $f \in \mathrm{End}(V)$, λ un autovalor de f y $V^\lambda = V^{(x-\lambda)}$ definido como en el ejercicio **??** y $V_n^\lambda = \ker((f-\lambda)^n)$. Sea $h \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio cualquiera. Probar que
(a) $\ker(h(f))$ e $\mathrm{Im}(h(f))$ son subespacios f-invariantes.
(b) Si λ es raíz de h entonces $V_1^\lambda \subseteq \ker(h(f))$.
(c) Si λ es raíz de multiplicidad n de h entonces $V_n^\lambda \subseteq \ker(h(f))$.
(d) Si λ no es raíz de h entonces $V_1^\lambda \subseteq \mathrm{Im}(h(f))$.
(e) Probar que, en este caso, $V^\lambda \subseteq \mathrm{Im}(h(f))$.

(10) Probar que dos matrices en $\mathbb{C}^{2\times 2}$ son semejantes si y solo si tienen igual característico e igual minimal. ¿Vale esto en $\mathbb{C}^{3\times 3}$? ¿Y en $\mathbb{C}^{4\times 4}$?

(11) Encontrar la forma y una base de Jordan para las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

(e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

(f) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(h) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & -3 \\ 5 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(i) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(j) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(12) Sea $V \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ el subespacio generado por e^x, xe^x, x^2e^x y e^{2x}. Hallar la forma y una base de Jordan para el endomorfismo $t(f) = f'$.

(13) Encontrar todas las formas de Jordan posibles para una matriz A tal que
(a) $\mathcal{X}_A(X) = (X-2)^4(X-3)^2$, $m_A(X) = (X-2)^2(X-3)^2$.
(b) $\mathcal{X}_A(X) = (X-7)^5$, $m_A(X) = (X-7)^2$.
(c) $\mathcal{X}_A(X) = (X-2)^7$, $m_A(X) = (X-2)^3$.
(d) $\mathcal{X}_A(X) = (X-3)^4(X-5)^4$, $m_A(X) = (X-3)^2(X-5)^2$.

(14) Encontrar la forma de Jordan de una matriz $A \in \mathbb{C}^{15\times 15}$ con tres autovalores λ_1, λ_2 y λ_3, que verifica $\mathrm{rg}(A-\lambda_1 Id) = 13$, $\mathrm{rg}(A-\lambda_1 Id)^2 = 11$, $\mathrm{rg}(A-\lambda_1 Id)^3 = 10$, $\mathrm{rg}(A-\lambda_1 Id)^4 = 10$, $\mathrm{rg}(A-\lambda_2 Id) = 13$, $\mathrm{rg}(A-\lambda_2 Id)^2 = 11$, $\mathrm{rg}(A-\lambda_2 Id)^3 = 10$, $\mathrm{rg}(A-\lambda_2 Id)^4 = 9$, $\mathrm{rg}(A-\lambda_3 Id) = 13$, $\mathrm{rg}(A-\lambda_3 Id)^2 = 12$, $\mathrm{rg}(A-\lambda_3 Id)^3 = 11$.

(15) Hallar la forma de Jordan de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n+1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

(16) Sea $J = J_{\lambda,n} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz-bloque de Jordan de $n \times n$.
(a) Calcular J^m. (**Sugerencia**: descomponer $J = D + N$, donde D es escalar y N es nilpotente; notar que conmutan y aplicar el binomio de Newton).
(b) Encontrar una relación entre J^m y las $(n-1)$ primeras derivadas de la función x^m.
(c) Calcular $f(J)$, donde $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ es un polinomio.
(d) Sea $f = \sum_{i=0}^\infty a_i x^i$ una serie de potencias cuyo radio de convergencia es $> |\lambda|$. Probar que la serie $f(J) = \sum_{i=0}^\infty a_i J^i$ converge y encontrar la expresión de $f(J)$ en términos de las derivadas de f.
(e) Calcular e^J, $\mathrm{sen}(J)$, $\cos(J)$.
(f) Calcular e^A, $\mathrm{sen}(A)$ y $\cos(A)$ para A alguna de las matrices del ejercicio **??**.

(17) Hacer lo mismo que en el ejercicio anterior pero para tJ, donde $t \in \mathbb{R}$ es tal que el radio de convergencia de f es $> |t\lambda|$.

(18) Probar que si A y B conmutan entonces $e^{A+B} = e^A e^B$.

(19) Sea $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ con polinomio minimal $m_A = x^6$. Si $\{v_1, \dots, v_6\}$ es una base de Jordan para A, encontar la forma y una base de Jordan para A^2, A^3, A^4 y A^5.

(20) Probar que en $\mathbb{C}^{n\times n}$ toda matriz es semejante a su transpuesta.

(21) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz tal que $a_{ij} = x_i y_j$ para vectores $x, y \in \mathbb{K}^n$. Calcular el rango de A y sus autovalores. Probar que es diagonalizable.

(22) Sea (a_n) una sucesión definida por $a_0 = \alpha$, $a_1 = \beta$ y $a_{n+2} = \lambda a_{n+1} + \mu a_n$ si $n \geq 0$. Escribir el vector $(a_{n+2}, a_{n+1})^t$ como $A \cdot (a_{n+1}, a_n)^t$ para cierta matriz A. Encontrar (a_{n+2}, a_{n+1}) en términos de α y β para $\lambda = \mu = 1$ (sucesión de Fibonacci). Hacer lo propio con $\lambda = 4$, $\mu = -4$.