Algebra Lineal

Primer Cuatrimestre 2005

Práctica 9

Variedades Lineales

(1) Sean en $\mathbb{R}^3$ los puntos $A = (1, -1, 0), B = (2, 1, -1), x_1 = (0, 0, 0), x_2 = (3, 0, 1), x_3 = (5, 4, -2)$. Calcular:

(a) $x_1 +_A x_2$
(b) $x_1 +_B x_2$
(c) $3 \cdot_A x_1 +_A (-2) \cdot_A x_2$
(d) $3 \cdot_B x_1 +_B (-2) \cdot_B x_2$
(e) $x_1 +_A x_2 +_A x_3$
(f) $x_1 +_A x_2 +_A x_3$
(g) $4 \cdot_A x_1 +_A (-5) \cdot_A x_2 +_A 2 \cdot_A x_3$
(h) $4 \cdot_B x_1 +_B (-5) \cdot_B x_2 +_B 2 \cdot_B x_3$

Determinar cuáles de las combinaciones lineales son combinaciones afines.

(2) Sean en $\mathbb{R}^2$ los puntos $A = (-1, 2), B = (3, -1)$
(a) Determinar una base de $\mathbb{R}^2_A$ que contenga a $x_1 = (0, 1)$
(b) Determinar una base de $\mathbb{R}^2_B$ que contenga a $x_2 = (4, -3)$
Dibujar.

(3) Sea en $\mathbb{R}^2$ el punto $A = (4, -1)$. Determinar todos los $b \in \mathbb{R}$ para los cuales $\{(3, -5), (2, b)\}$ es base de $\mathbb{R}^2_A$.

(4) Sea en $\mathbb{R}^3$ el punto $A = (1, -1, 2)$
(a) Determinar una base de $\mathbb{R}^3_A$ que contenga a $x_1 = (1, 0, -1), x_2 = (2, -1, 1)$.
(b) ¿Existe una base de $\mathbb{R}^3_A$ que contenga a $x_1 = (2, 0, 1)$ y $x_2 = (3, 1, 0)$?

(5) (a) Verificar que

$$S_1 = \{(1, 2, 1); (1, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 0, 0)\} \text{ y}$$
$$S_2 = \{(1, -1, 1); (1, -1, 0), (1, 0, 1), (2, 2, 1)\}$$

son sistemas de coordenadas afines en $\mathbb{R}^3$.
(b) Determinar las ecuaciones que permiten obtener las coordenadas (y_1, y_2, y_3) en el sistema S_2 de un punto $x \in \mathbb{R}^3$, en función de las coordenadas (x_1, x_2, x_3) del mismo en el sistema S_1.
(c) ¿Existen puntos de $\mathbb{R}^3$ que tienen las mismas coordenadas en ambos sistemas?

(6) Sean en $\mathbb{R}^3$ los puntos $A = (1, 2, 3), B = (0, -1, 2), C = (1, 0, 1), D = (0, 1, 4)$. Hallar en cada caso, si es posible, un sistema de coordenadas afines $S = \{H; v_1, v_2, v_3\}$ de manera que respecto de él, sean:
(a) $A = (0, 0, 0), B = (1, 0, 0), C = (0, 1, 0), D = (0, 0, 1)$
(b) $A = (0, 0, 0), B = (1, 0, 0), C = (0, 1, 0), D = (1, -1, 0)$

(7) Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y $A, B, C \in V$ contenidos en una recta L.
(a) Si $A \neq B$, verificar que $L = \{x \in V : \ x = A + \lambda(B - A), \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Si $A \neq B$ y $B \neq C$, sea $t \in \mathbb{K}$ tal que $C = A + t(B - A)$. Se define la *razón simple de* A, B, C como el escalar $[A, B, C] = \frac{t}{1-t}$.

(b) Sean $P, Q \in L$ $(P \neq Q)$. Siendo L el subespacio de V_Q generado por P, se tiene que $A = a \cdot_Q P, B = b \cdot_Q P, C = c \cdot_Q P$. Verificar que si A, B, C son distintos entre sí, entonces $[A, B, C] = \frac{c-a}{b-c}$.

(8) **Teorema de Tales.**
Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $\dim V \geq 2$, y $\pi \subset V$ un plano. Sean $A, B, C, D \in \pi$, de a tres no colineales tales que $R_{AC} \parallel R_{BD}$. Sean $P \in R_{AB}$, $Q \in R_{CD}$ tales que $P \neq A, B$, $Q \neq C, D$, $P \neq Q$. Probar que son equivalentes
(a) $R_{PQ} \parallel R_{AC}$
(b) $[A, B, P] = [C, D, Q]$
(Dibujar.)

(9) Hallar un conjunto de generadores afinmente independientes para la variedad lineal T
(a) $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y + z = 0, y + z = 1\}$
(b) $M = T \vee T'$, siendo T y T' las variedades cuyas ecuaciones paramétricas respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ son

$$T : (x, y, z) = (t + 1, -t + 2, 2t - 2), \qquad T' : (x, y, z) = (t - 1, 2t + 1, -t - 1)$$

(c) T la variedad lineal de $\mathbb{R}^4$ cuyas ecuaciones paramétricas respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ son:

$$(x, y, z, w) = (\alpha + \beta + 1, \alpha + \beta, -\gamma - \beta, \gamma - \alpha - 1)$$

(10) Sean T, T' las variedades lineales de $\mathbb{R}^4$, cuyas ecuaciones implícitas respecto de la base canónica son

$$T : \begin{cases} x - y = 1 \\ z + w = 0 \end{cases} \qquad T' : \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z + w = 1 \end{cases}$$

Hallar $T \cap T'$ y $T \vee T'$.

(11) Dados los planos π, π' de $\mathbb{R}^3$ cuyas ecuaciones paramétricas respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ son:

$$\pi : \begin{cases} x = 6\lambda + 5\mu + 1 \\ y = \mu + 2 \\ z = 3\lambda - 1 \end{cases} \qquad \pi' : \begin{cases} x = \lambda + 5\mu + 6 \\ y = -\lambda + \mu \\ z = 3\lambda + 5\mu + 4 \end{cases}$$

Determinar ecuaciones paramétricas:

(a) de rectas L, L' paralelas tales que $L \subset \pi$, $L' \subset \pi'$

(b) de rectas alabeadas L, L' tales que $L \subset \pi$, $L' \subset \pi'$

(c) de una recta $L' \subset \pi'$ que contenga al punto de coordenadas $(6, 0, 4)$ y sea paralela a la recta $L \subset \pi$ definida por

$$L : \begin{cases} x = -2\lambda + 1 \\ y = 2\lambda + 2 \\ z = -6\lambda - 1 \end{cases}$$

(12) Sea T la variedad lineal de $\mathbb{R}^4$

$$T = (1, 0, 0, 0) + \langle (1, 0, 0, -1), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 1, 1) \rangle.$$

Determinar dos variedades lineales M_1, M_2 tales que $M_1 \cap M_2$ sea la variedad generada por los puntos $(1, 0, 1, 1), (-1, 1, 0, 0), (0, 1/2, 1/2, 1/2)$ y $T = M_1 \vee M_2$.

(13) Sea en $\mathbb{R}^4$ el plano

$$\pi : (1, 1, -1, 1) + \lambda(1, 0, 1, 0) + \beta(-2, 1, 0, 1).$$

Hallar planos π_1, π_2 cada uno de ellos alabeados con π tales que $\dim(\pi_1 \vee \pi_2) = 3$.

(14) Sea $\{A; v_1, v_2\}$ un sistema de coordenadas afines de $\mathbb{R}^2$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación afín que transforma los puntos de coordenadas $(1, 3), (2, 4), (2, 1)$ en los puntos de coordenadas $(2, 1), (1, 1), (2, 2)$ respectivamente. Probar que f es un isomorfismo afín y hallar f^{-1}.

(15) Definir una transformación afín $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(T) = T'$, siendo

$$T = \sigma((1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, -1)) \qquad T' = \sigma((3, 0), (4, -1)).$$

(16) Sean en $\mathbb{R}^3$ las variedades lineales definidas por

$$M_1 : \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = -1 \end{cases} \qquad M_2 : x - y + z = 0$$

Construir una transformación afín $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(M_1) \subset M_2$ y $f(M_2) = M_1$.

(17) Sean en $\mathbb{R}^4$ las variedades lineales M_1, M_2, T_1, T_2 de ecuaciones

$$M_1 : \begin{cases} x - y + z = 2 \\ w = 1 \end{cases} \qquad T_1 : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ w = 0 \end{cases}$$

$$M_2 : \begin{cases} 2x + w = 0 \\ x + y - z + w = -2 \end{cases} \qquad T_2 : \begin{cases} x - y = 1 \\ 2y + z = 2 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Construir una transformación afín $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(M_1 \vee M_2) = T_1$, $f(M_1 \cap M_2) = T_2$ ¿Resulta $f \in GA(\mathbb{R}^4)$?

(18) Sean π, π' dos planos alabeados en $\mathbb{R}^4$, y L, L' dos rectas de $\mathbb{R}^4$ tales que $L \subset \pi, L' \subset \pi'$.

(a) Si $L \parallel L'$, probar que existe una transformación afín $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(\pi) = L$ y $f(\pi') = L'$.

(b) Si L y L' son alabeadas, ¿es posible definir una transformación afín $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(\pi) = L, f(\pi') = L'$?