

Álgebra Lineal — 2005

Segundo parcial (Recuperatorio)

1. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{C} de dimensión finita y con un producto interno.
 - a) Sea $W \subset V$ un subespacio, sea W^\perp su complemento ortogonal, y sea $f_W : V \rightarrow V$ la aplicación lineal tal que $f_W(w + w') = w - w'$ si $w \in W$ y $w' \in W^\perp$. Muestre que cualquiera sea W , f_W es unitaria y autoadjunta.
 - b) Muestre que todo endomorfismo f unitario y autoadjunto de V es de esta forma. Esto es, muestre que para cada $f \in \text{End}(V)$ unitario y autoadjunto, existe un subespacio $W \subset V$ tal que $f = f_W$.
2. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} con un producto interno, y $s \in \text{End}(V)$ tal que $s^2 = Id$. Entonces son equivalentes:
 - (a) $s \in \mathcal{O}(V)$;
 - (b) $\ker(s - Id) \perp \ker(s + Id)$; y
 - (c) $s = s^*$.
3. Sea $f \in \text{End}(V)$ un automorfismo de un espacio vectorial complejo de dimensión finita. Mostrar que f es diagonalizable sii f^2 lo es.
Determinar si alguna de las dos implicaciones siguen valiendo cuando f no es un isomorfismo.