Álgebra Lineal — 2005
Segundo parcial (Segundo recuperatorio)

1. Sea $V = \mathbb{R}^4$ dotado del producto interno que hace de las columnas de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

una base ortonormal, y sea $\mathcal{E}$ la base canónica de V.

   a) Determinar el producto interno explícitamente.

   b) Sea $f : V \to V$ tal que

$$[f]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & -4 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Determinar $[f^*]_{\mathcal{E}}$ y encontrar una base ortonormal de $\ker f^*$.

   c) Determinar un proyector $p : V \to V$ autoadjunto tal que $\operatorname{im} p = \ker f^*$.

2. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno. Decimos que $f \in \operatorname{End}(V)$ es *semidefinido positivo* si $\langle fv, v \rangle \geq 0$ cualquiera sea $v \in V$.

   Sea $p \in \operatorname{End}(V)$ un proyector.

   a) Mostrar que $1 - p^*p$ es semidefinido positivo sii p es ortogonal.

   b) Mostrar que

$$\ker(1 - p^*p) = \operatorname{im} p \cap \operatorname{im} p^* = \ker(2 - p - p^*)$$

   y que

$$\operatorname{im}(1 - p^*p) = \ker p + \ker p^* = \operatorname{im}(2 - p - p^*).$$

3. Hallar la forma de Jordan y la base que la realiza para

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$