Álgebra Lineal — 2005

Segundo Parcial

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión n.

   a) Sea $f \in \mathrm{End}(V)$ un endomorfismo diagonalizable que posee un vector cíclico. Entonces todos los autovalores de f son simples.

   b) Si $f \in \mathrm{End}(V)$ es un endomorfismo con n autovalores distintos, y si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de autovectores, entonces $v_1 + \cdots + v_n$ es un vector f-cíclico.

2. *a*) Sea $N \in M_n(\mathbb{C})$ una matriz nilpotente de índice máximo, de manera que $N^n = 0$ y $N^{n-1} \neq 0$. Muestre que N y N^t son semejantes.

   b) Muestre que toda matriz es semejante a su transpuesta.

3. En un espacio con producto interno, y $p \in \mathrm{End}(V)$ un proyector. Son equivalentes:

   a) p es ortogonal;

   b) $p = p^*$;

   c) p es normal;

   d) $\|p(v)\| \leq \|v\|$ para todo $v \in V$.

4. Sea $V = \mathbb{R}^4$, y sea $\langle -, - \rangle$ el único producto interno en V tal que

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

   es una base ortonormal de V. Sea $\phi \in V^*$ tal que

$$\phi(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}) = 2x - 3y + z - 4w.$$

   y sean $v_0 \in V$ tal que $\phi(u) = \langle v_0, u \rangle$ para todo $u \in V$ y $S = \langle v_0 \rangle$.
   Sea $f : V \to V$ tal que

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3x + 2y + z + 2w \\ 2x + z \\ z \\ y + w + z \end{pmatrix}.$$

   Encuentre un proyector ortogonal de V sobre $S^\perp \cap (\ker f^*)^\perp$.