Álgebra Lineal — 2005

Práctica 7: Algunas cuentas

Cuentas

1. Determine la intersección y la suma de los siguientes pares de subespacios de V:

   a) $V = \mathbb{R}^5$, $S_1 = \{(x_i)_{i=1}^5 \in \mathbb{R}^5 : x_1 + 2x_2 - x_4 = 0, 2x_1 + x_3 + 3x_5 = 0\}$, $S_2 = \{(x_1)_{i=1}^5 \in \mathbb{R}^5 : x_1 - 3x_5 = 0, -x_1 - 2x_2 + x_4 = 0, x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 0\}$.

   b) $V = \mathbb{R}^4$, $S_1 = \{(x_i)_{i=1}^4 \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0, 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0, x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0\}$, $S_2 = \{(x_i)_{i=1}^4 \in \mathbb{R}^4 : 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$.

   c) $V = \mathbb{R}^4$, $S_1 = \{(x_i)_{i=1}^4 \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0, 2x_1 + 3x_2 + 5x_4 = 0\}$, $S_2 = \langle(-10, 5, 0, 1), (1, 2, 3, 4)\rangle$.

2. Sea $f : k^5 \to k^4$ la transformación lineal cuya matriz con respecto a las bases canónicas es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Determinar el anulador del núcleo de f, la imagen de f^t, y una transformación lineal $g : k^4 \to k^5$ tal que $f \circ g = \mathbb{I}d$.

3. a) Sea $V = M_n(k)$ el espacio vectorial de las matrices $n \times n$, y $S \subset V$ el subespacio de las matrices simétricas. Determinar una base para S°.

   b) Sea $V = M_n(\mathbb{C})$ el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de las matrices $n \times n$ con coeficientes complejos. Determinar una base para el anulador del subespacio $H \subset M$ de las matrices hermitianas.

4. Sean $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, $\mathcal{U} = \{v_1 + v_3, v_1 + 2v_2 + v_3, v_2 + v_3\}$ y $\mathcal{U}' = \{w_1, w_2, w_3\}$ bases de k^3, y $\mathcal{E}$ su base canónica. Sea $f \in \operatorname{End}(k^3)$ la transformación lineal tal que

$$\|f\|_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \|f\|_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Determinar la base $\mathcal{U}'$.

5. Sea $f : k^3 \to k$ tal que $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2 + x_3$, y $g : k^3 \to k^3$ tal que su matrix con respecto a la base $\{(1, -1, 2), (-3, 5 - 1), (1, 3, -3)\}$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Describa el anulador de $\ker f + \ker g$.

6. Sea V un espacio vectorial y $\mathcal{B}$ una base de V. Sea $\mathcal{B}^*$ la base dual de $\mathcal{B}$ en V^*, y $\mathcal{B}^{**}$ la base dual de $\mathcal{B}^*$ en V^{**}. Determine la matrix que representa al isomorfismo canónico $V \to V^{**}$ con respecto a las bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^{**}$.