

# Álgebra Lineal — 2005

## Práctica 9: Autovalores

1. a) Calcular el polinomio característico, los autovalores y autovectores de las siguientes matrices, considerando por separado el caso en que los coeficientes están en  $\mathbb{R}$  y en  $\mathbb{C}$ :

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}; & 5) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}; & 8) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ 2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; & 6) \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}; & 9) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \\ 3) \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}; & 7) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}; & \\ 4) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}; & & \end{array}$$

En todos los casos,  $a \in \mathbb{K}$ .

- b) Interprete cada una de las matrices del ítem anterior como la matrix de una transformación lineal  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  (con  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  y  $\mathbb{C}$ , respectivamente) con respecto a la base canónica  $\mathcal{E}$  de  $\mathbb{K}^n$ , y encuentre, cuando es posible, una base  $\mathcal{B}$  de manera tal que  $[f]_{\mathcal{B}}$  es diagonal; en ese caso, encuentre la matrix de cambio de base  $C(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ .
2. a) Sean  $A, D \in M_n(k)$  y  $C \in GL_n(k)$  tales que  $A = CDC^{-1}$ . Mostrar que  $A^k = CD^kC^{-1}$  cualquiera sea  $k \in \mathbb{N}$ .
- b) Calcular

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}^n$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

- c) El objetivo de esta parte es encontrar una formula cerrada para la sucesión  $(a_n)_{n \geq 0}$  tal que  $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$  y, si  $n \geq 0$ ,

$$a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n.$$

Considere el endomorfismo  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  tal que, en la base canónica, está representado por la matrix

$$[f] = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Muestre que, para cada  $n \geq 0$  es

$$f \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Encuentre ahora una base que diagonalice a  $f$  cuando esto sea posible, y use la primera parte de este ejercicio y el hecho de que

$$f^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

para obtener una fórmula cerrada para  $a_n$  en esos casos.

3. a) Determinar que matrices de la forma  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$  con  $a, b, c \in k$ ,  $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_5\}$ , son diagonalizables.  
b) Mostrar que toda matrix  $A \in M_2(\mathbb{C})$  es o bien diagonalizable o bien similar a una matrix de la forma  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$  para algún  $a \in \mathbb{C}$ .
4. a) Sea  $A \in M_2(\mathbb{C})$  tal que todos sus coeficientes son reales y tal que  $\begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \end{pmatrix}$  es un autovector correspondiente al autovalor  $1 + 3i$ . Mostrar que  $A$  es diagonalizable, encontrar una base de autovectores, y determinar  $A$ .  
b) Sea  $A \in M_2(\mathbb{R})$  tal que  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  es un autovector de autovalor  $\sqrt{2}$ , y tal que  $\chi_A \in \mathbb{Q}[t]$ . Determinar si  $A$  es diagonalizable. ¿Cuántas matrices satisfacen estas condiciones?.
5. a) Sea  $A \in M_3(\mathbb{R})$  tal que  $\text{tr } A = -4$ . Calcular los autovalores de  $A$  sabiendo que los de  $A^2 + 2A$  son  $-1, 3$  y  $8$ .  
b) Sea  $A \in M_4(\mathbb{R})$  tal que  $\det A = 6$ , tiene a  $1$  y a  $-2$  como autovalores, y tal que  $A - 3$  tiene a  $-4$  como autovalor. Determinar los restantes autovalores de  $A$ .
6. a) Sea  $A \in M_n(k)$ . Mostrar que  $A$  y  $A^t$  tienen los mismos autovalores. Mostrar con un ejemplo que no sucede lo mismo con los autovectores.  
b) ¿Qué puede decir de los autovalores de  $A^k$  si conoce los de  $A$ ?

7. Determinar los autovalores y autovectores de

$$D : f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mapsto f' \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

8. a) Sea  $f \in \text{End}(V)$  un proyector de un espacio vectorial de dimensión finita  $V$  tal que  $\dim \text{im } f = s$ . Determinar su polinomio característico, y mostrar que es diagonalizable.

- b) Sea  $f \in \text{End}(V)$  un endomorfismo nilpotente de índice de nilpotencia  $l$ . Determinar su polinomio característico. ¿Cuándo es diagonalizable?
- c) Sea  $f \in \text{End}(V)$  un endomorfismo de un espacio vectorial real tal que  $f^2 + I = 0$ . Mostrar que  $f$  es un automorfismo y que  $\dim V$  es par.
9. Un endomorfismo  $f \in \text{End}(V)$  de rango 1 es diagonalizable sii  $\ker f \cap \text{im } f = 0$ .
10. Sean  $A \in M_{m,n}(k)$  y  $B \in M_{n,m}(k)$ . Mostrar que las matrices de bloques

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$$

de  $M_{n+n}(k)$  son semejantes. Concluir que

$$\chi_{AB}(t) = \chi_{BA}(t)$$

11. Sea  $A \in M_n(k)$  y sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  las raíces de su polinomio característico contadas con multiplicidad. Mostrar que  $\text{tr } A = \sum \lambda_i$  y que  $\det A = \prod \lambda_i$ .