

# Álgebra Lineal — 2005

## Práctica 11: Forma normal de Jordan.

1. Determinar la forma normal de Jordan y una base de Jordan para las siguientes matrices:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & -3 \\ 5 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$h) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$i) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. ¿Cuántas clases de semejanza hay de matrices en  $M_8(\mathbb{C})$  cuyo polinomio minimal es  $x^3$ ? ¿Y en  $M_8(\mathbb{R})$ ?
3. ¿Para qué valores de  $n$  es cierto el siguiente enunciado?

Dos endomorfismos nilpotentes de  $\mathbb{C}^n$  con el mismo polinomio minimal y con el mismo rango son semejantes.

4. Hallar una base en la que se realice la forma normal de Jordan, y la forma de Jordan, de la matriz  $A \in M_n(\mathbb{C})$  con

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq j; \\ 1 & \text{si } i > j. \end{cases}$$

5. Decidir si existen endomorfismos tales que

$$a) f \in \text{End}(\mathbb{C}^8), \text{ nilpotente, y}$$

$$(\text{rk } f, \text{rk } f^2, \text{rk } f^3, \text{rk } f^4, \text{rk } f^5) = (6, 4, 3, 1, 0);$$

b)  $f \in \text{End}(\mathbb{C}^{16})$ ,  $m_f = X^5$ , y

$$(\text{rk } f, \text{rk } f^2, \text{rk } f^3, \text{rk } f^4, \text{rk } f^5) = (9, 5, 3, 1, 0).$$

¿Cuántas clases de semejanza hay?

6. Sea  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  el endomorfismo que en la base canónica tiene matriz  $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ . Factorizar su polinomio característico, y escribir a 1 como combinación lineal de los factores. Determinar proyectores sobre los espacios  $V^p = \{v \in \mathbb{R}^3 : \exists m : p^m(v) = 0\}$ .

7. Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un cuerpo  $k$  algebraicamente cerrado. Si  $\lambda \in k$ , sea  $V_\lambda = \{v \in V : \exists m : (f - \lambda)^m(v) = 0\}$ , y sea  $V_\lambda^n = \{v \in V : (f - \lambda)^n(v) = 0\}$ . Sea  $h \in k[X]$ .

- $\ker h(f)$  y  $\text{im } h(f)$  son  $f$ -invariantes.
- Si  $\lambda \in k$  es raíz de  $h$ , entonces  $V_\lambda^1 \subset \ker h(f)$ .
- Si  $\lambda \in k$  es raíz de  $h$  de multiplicidad  $n$ , entonces  $V_\lambda^n \subset \ker h(f)$ .
- Si  $\lambda \in k$  no es raíz de  $h$ , entonces  $V_\lambda^1 \subset \text{im } h(f)$ , y, de hecho, es  $V_\lambda \subset \text{im } h(f)$ .

8. Determinar para que valores de  $n \in \mathbb{N}$  es cierto que

Dos matrices en  $M_n(\mathbb{C})$  son semejantes sii tienen el mismo polinomio característico y minimal.

9. Sea  $J = J(\lambda, n) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$  un bloque de

Jordan.

- Calcular  $J^m$ .
- Calcular  $f(J)$  si  $f \in \mathbb{R}[X]$ .
- Sea  $\sum_{i \geq 0} a_i x^i$  una serie de potencias de radio de convergencia más grande que  $|\lambda|$ . Mostrar que  $\sum_{i \geq 0} a_i J^i$  converge y determinar su suma en término de las derivadas de la función suma de la serie original.
- Calcular  $e^J$ ,  $\sin J$ ,  $\cos J$ .
- Calcular  $e^A$ ,  $\sin A$ ,  $\cos A$  para algunas de las matrices del ejercicio 1.

10. a) Sea  $N \in M_3(\mathbb{C})$  nilpotente, y sea  $A = 1 + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2$ . Mostrar que  $A$  es una raíz cuadrada de  $1 + N$ .
- b) Desarrollando la función  $(1 + x)^{1/2}$  en su serie de Taylor, muestre que toda matriz de la forma  $1 + N$  con  $N$  nilpotente admite raíces cuadradas. ¿Cuántas?
- c) Muestre que un endomorfismo  $f \in \text{End}(V)$  nilpotente de índice de nilpotencia máximo no posee raíces cuadradas.
11. Si  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$  conmutan,  $e^{A+B} = e^A e^B$ .
12. Sea  $f \in \text{End}(V)$  con  $\dim V = 6$  de polinomio minimal  $X^6$ , y supongamos que  $\{v_1, \dots, v_6\}$  es base de Jordan para  $f$ . Encontrar la forma de Jordan para  $f^2, f^3, f^4$  y  $f^5$ , y bases que las realicen.
13. Sean  $x, y \in k^n$ , y  $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$  tal que  $a_{ij} = x_i y_j$ . Mostrar que el rango de  $A$  es 1, determinar sus autovalores, y mostrar que es diagonalizable.
14. Sea  $k$  un cuerpo algebraicamente cerrado, y  $f \in \text{End}(V)$  con  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita. Si existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $f^m = \text{Id}$ ,  $f$  es diagonalizable.
15. Sea  $J = J(\lambda, n)$  un bloque de Jordan de  $n \times n$  con autovalor  $\lambda \in k$ , y sea  $C(J) = \{A \in M_n(k) : AJ = JA\}$ . Muestre que

$$C(J) = \{p(J) : p \in k[X]\}.$$

