Álgebra Lineal — 2005

Práctica 12: Espacios vectoriales con producto interno.

1. Sea V un espacio vectorial sobre $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, y sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V.

   a) Mostrar que existe exactamente un producto interno sobre V que hace de $\mathcal{B}$ una base ortonormal.

   b) Determinar ese producto interno explícitamente en los siguientes casos:

      1) $V = \mathbb{R}^2$, $k = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{(1,1), (-1,-2)\}$;
      2) $V = \mathbb{R}^3$, $k = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$;
      3) $V = \mathbb{C}^3$, $k = \mathbb{C}$, $\mathcal{B} = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$;
      4) $V = \mathbb{C}^4$, $k = \mathbb{C}$, $\mathcal{B} = \{(1,0,0,i), (0,1,0,i), (i,i,i,0), (0,2,0,0)\}$;
      5) $V = \mathbb{R}[X]_3$, $k = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{x^i\}_{i=0}^3$;
      6) $V = \mathbb{R}[X]_3$, $k = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{(x-1)^i\}_{i=0}^3$.

2. Determinar para que valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ la forma bilineal

$$\phi(x,y) = ax_1y_2 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + bx_2y_2 + (1+b)x_3y_3 + cx_1y_3$$

   resulta un producto interno en $\mathbb{R}^3$.

3. *a*) Determinar condiciones sobre una matriz $B \in M_n(\mathbb{R})$ de manera que $\langle x, y \rangle = x^t B y$ resulte un producto interno sobre $\mathbb{R}^n$.

   b) Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle -, - \rangle_V$, y sea $T : W \to V$ una transformación lineal. Definamos

$$\langle x, y \rangle_W = \langle Tx, Ty \rangle_V, \qquad \forall x, y \in W.$$

   Determinar condiciones necesarias y suficientes para que $\langle -, - \rangle_W$ resulte un producto interno.

4. Hallar los complementos ortogonales de los siguientes subespacios, describiendo bases ortonormales de los mismos:

   a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in V : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$, con respecto al producto interno usual;

   b) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle (1,2,1) \rangle$, con respecto al producto interno dado por

$$\phi(x,y) = x_1y_2 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1;$$

c) $V = \mathbb{R}[X]_4$, $S = \langle x^2, x^4 + x^2 + 1 \rangle$, con respecto al producto interno dado por

$$\phi(p,q) = \int_0^1 pq \, \mathrm{d}x;$$

d) $V = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle \subset C^\infty(\mathbb{R})$ con $f_1(x) = x$, $f_2(x) = e^x$ y $f_3(x) = x^2$, $S = \langle f_1 + f_2 \rangle$, y

$$\phi(f,g) = f(0)g(0) + \tfrac{1}{2} f(1)g(1) + f(\tfrac{1}{2})g(\tfrac{1}{2});$$

5. Sea $V = M_n(\mathbb{C})$, y $\phi(A,B) = \operatorname{tr} AB^*$. Mostrar que ϕ es un producto interno sobre V, y determinar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.

6. a) Sea $w : [-1,1] \to \mathbb{R}^+$ una función continua y positiva. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $V = \mathbb{R}[X]_n$, y definamos

   $$\phi(f,g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)w(x) \, \mathrm{d}x.$$

   Muestre que ϕ es un producto interno sobre V.

   b) Realice el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, X, X^2, X^3\}$ cuando $n = 3$ y $w(x) \equiv 1$.

7. Sea p la proyección ortogonal de $V = \mathbb{R}^3$ sobre su subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in V : 2x_1 - x_2 = 0\}$ con respecto al producto interno usual.

   a) Encontrar todas las rectas $L \subset V$ tales que $p(L) = \{(1,2,1)\}$.

   b) Encontrar una recta $L_1 \subset V$ tal que $p(L_1) = L_2$, si $L_2 = \{x \in V : 2x_1 - x_2 = x_1 - x_3 = 0\}$.

8. Sea $V = \mathbb{R}^3$ con producto interno determinado por la matriz

   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   y sea $\phi \in V^*$ tal que $\phi(x) = 2x_1 - 2x_2 - 3x_3$. Encontrar $v \in V$ tal que $\phi = \langle -, v \rangle$.

9. Determinar f^* si

   a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, -x_1 + x_3)$;

   b) $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + (1-i)x_2, x_2 + (3+2i)x_3, x_1 + ix_2 + x_3)$;

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que si $\mathcal{B} = \{(1,2,-1),(1,0,0),(0,1,1)\}$, entonces

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

d) $f : \mathbb{R}[X]_3 \to \mathbb{R}[X]_2$ tal que $f(p) = p'$, con respecto a los productos internos dados por $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$;

e) $f : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ tal que $f(A) = PAP^{-1}$, para una matriz inversible fija $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ y el producto interno $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr} AB^*$ en $M_n(\mathbb{C})$.

10. a) Sea $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ tal que en la base canónica es

$$[f] = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinar un producto interno en $\mathbb{R}^3$ para el que f resulte autoadjunta.

b) ¿Es cierto que para todo endomorfismo $f \in \operatorname{End}(V)$ de un espacio vectorial real de dimensión finita existe un producto interno $\langle -, - \rangle$ para el cual $f^* = f$?

11. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita con un producto interno, y $S \subset V$ un subespacio. Mostrar que la proyección ortogonal de V en S es un endomorfismo autoadjunto de V. Determine sus autovalores. ¿Hay otros proyectores de V con imagen S que sean autoadjuntos?

12. a) Encontrar $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ tal que PAP^t sea diagonal, si

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Encontrar $U \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ tal que PAP^* sea diagonal, si

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & i & 0 \\ 1 & 3 & 2i & 1 \\ -i & -2i & 3 & i \\ 0 & 1 & -i & 2 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

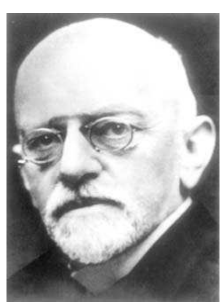
13. Sea $V = M_n(\mathbb{C})$ con producto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr} AB^*$. Si $M \in M_n(\mathbb{C})$, sea $t_M : A \in V \to MA \in V$. Mostrar que t_M es un endomorfismo unitario sii M es unitaria.

14. *a*) Si V es un espacio vectorial real con un producto interno, es
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2,$$
cualesquiera sean $x, y \in V$.
    b) Si V es un espacio vectorial complejo con un producto interno, es
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 + \frac{i}{4}\|x+iy\|^2 + \frac{i}{4}\|x-iy\|^4,$$
cualesquiera sean $x, y \in V$.
    c) Mostrar que la suma de dos productos internos es un producto interno.

15. Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita con un producto interno, y sea $T \in \operatorname{End}(V)$ un endomorfismo autoadjunto. Mostrar:
    a) $\|v + iTv\| = \|v - iTv\|$, cualquiera sea $v \in V$;
    b) $v + iTv = w + iTw$ sii $v = w$;
    c) $Id + iT$ e $Id - iT$ son inversibles;
    d) $U = (Id + iT)(Id - iT)^{-1} \in \operatorname{End}(V)$ es unitario—U se llama la *transformada de Cayley* de T;
    e) el endomorfismo U *determina* a T.

16. Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita con un producto interno, y sea T un operador normal, de manera que $TT^* = T^*T$.
    a) $T = T_1 + iT_2$ con $T_1, T_2 \in \operatorname{End}(V)$ operadores autoadjuntos que conmutan.
    b) Si T es nilpontente, $T = 0$.
    c) Existe $f \in \mathbb{C}[X]$ tal que $T^* = f(T)$.

17. Una matriz real cuadrada simétrica A posee una raíz cúbica simétrica.



David Hilbert