FINAL ALGEBRA LINEAL

Primer cuatrimestre de 2006

El examen consiste en 4 ejercicios, sacados de la siguiente lista. Cada ejercicio tiene 3 opciones, a), b), c). Debe decidirse por una opcion y hacer UNICAMENTE esa. Si no sabe la a), haga la b), y sino la c). Las opciones a) valen 2,5 puntos, las b) 1,75 y las c) 1,25. En la demostracion de cada item utilice cualquier item anterior (pero no posterior). Una copia de esta lista (sin anotaciones) debe tenerse en el examen.

K^n : n-Tuplas, Matrices y Determinantes

1. Considerar una matriz A de 2×2. Definir el determinante y [*Dem.*] que las columnas son $l.d.$ $\iff$ el determinante es nulo.

2. [*Dem.*] que toda permutacion se descompone es ciclos disjuntos.

3. [*Dem.*] que todo ciclo se descompone como producto de transposiciones.

4. Utilizando el polinomio de Vandermonde [*Dem.*] que dada una permutacion, la paridad de cualquier descomposicion en transposiciones es siempre la misma.

5. Definir *inversiones* y [*Dem.*] que la paridad del numero de inversiones es la misma que la paridad de cualquier descomposicion en transposiciones.

6. Definir el determinante por medio de su formula y [*Dem.*]:

   (a) $det(A) = detA^t$ (donde A^t es la matriz transpuesta).

   (b) Si A tiene una fila de ceros $det(A) = 0$.

   (c) Si αA consiste en intercambiar dos filas, $det(\alpha A) = -det(A)$.

   (d) Si A tiene dos filas iguales $det(A) = 0$.

   (e) Si $\beta_\lambda A$ consiste en multiplicar una fila por un escalar λ, $det(\beta_\lambda A) = \lambda det(A)$.

   (f) Si γA consiste en sumarle a una fila otra fila multiplicada por un escalar, $det(\gamma A) = det(A)$.

   (g) $detA = detA_1 + detA_2$ si una fila de A es la suma de las correspondientes filas de A_1 y A_2 (y todas las otras filas son las mismas).

   (h) Si una fila de A es una combinacion lineal de vectores fila, el $detA$ es la misma combinacion lineal de los respectivos determinantes.

   (i) Si una fila es combinacion lineal de las otras filas, $detA = 0$.

7. Enunciar y [*Dem.*] el teorema de Laplace (desarrollo por filas).

8. Enunciar y [*Dem.*] las formulas de Cramer para la resolucion de sistemas lineales de $n \times n$.

9. Definir forma multilineal alternada φ y [*Dem.*]:

   (a) $\varphi(A) = det(A)\varphi(I)$, donde I es la matriz identidad. Caso $n = 2$ (denotar los cuatro elementos de A con las letras $a\ b\ c\ d$).

   (b) $\varphi(A) = det(A)\varphi(I)$ caso general n (denotar los elementos de A como $a_{i\,j}$).

10. [*Dem.*] $det(AB) = det(A)det(B)$.

11. No se pide que demuestren este item, esta puesto para ser usado en lo que sigue.

   (a) Definir las tres operaciones elementales entre filas de una matriz A. Las tres operaciones elementales son inversibles (explicar que significa esto).

   (b) Definir matrices elementales. Las operaciones elementales consisten en multiplicar por la correspondiente matriz elemental (a izquierda si es de fila, a derecha si es de columna).

   (c) Si se aplican operaciones elementales de filas, la matriz que resulta corresponde a un sistema que tiene el mismo conjunto de soluciones que el sistema asociado a la matriz original.

   (d) Por medio de operaciones elementales de filas siempre se puede llevar una matriz A a la forma escalonada reducida; $A \rightsquigarrow^{Gauss} \rightsquigarrow E$ (metodo de Gauss).

12. Enunciar el comportamiento del determinante respecto a las tres operaciones de filas elementales y [*Dem.*] que si $A \rightsquigarrow^{Gauss} \rightsquigarrow E$, entonces $det(E) = \lambda det(A)$, para un escalar $\lambda \neq 0$. Deducir que $det(A) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; det(E) \neq 0$.

13. Se considera el espacio K^n y una matriz A de $m \times n$. [*Dem.*] que las columnas de A son $l.i.$ $\iff$ el sistema $AX = 0$ tiene como unica solucion la solucion nula.

14. Se considera una matriz cuadrada A y $(A \,|\, I) \rightsquigarrow^{Gauss} \rightsquigarrow (E \,|\, C)$, donde E es escalonada reducida. Utilizando 11, 12, y 13 [*Dem.*] la equivalencia entre los siguientes enunciados:

   (a) Las columnas de A son $l.i.$.

   (b) $E = I$.

   (c) E es inversible.

   (d) A es inversible y $C = A^{-1}$.

   (e) A es un producto de matrices elementales.

   (f) $det(A) \neq 0$

15. Utilizando 14 [*Dem.*] el caso general n del item 1, es decir:

   Columnas de A $l.d.$ $\Leftrightarrow$ $det(A) = 0$.

16. Dos matrices A, B de $m \times n$ se dicen equivalentes si existen matrices P, Q inversibles tales que $B = PAQ$. El rango r es el maximo orden de algun menor (con determinante) no nulo.

    (a) [*Dem.*] que el rango no cambia por operaciones elementales de filas (y por lo tanto tambien de columnas).

    (b) Observar (sin demostracion) que por operaciones de filas y de columnas $A \rightsquigarrow^{Gauss} \rightsquigarrow I_r$, donde I_r es la matriz que tiene r unos en la diagonal principal y todos los otros elementos cero.

        [*Dem.*] que A es equivalente a I_r, y que r es el rango.

    (c) [*Dem.*] que dos matrices son equivalentes $\iff$ tienen el mismo rango.

    (d) Definir el rango fila (r_f) y el rango columna (r_c) y [*Dem.*] $r = r_f = r_c$.

Espacios Vectoriales

17. Una base es un conjunto de generadores $l.i.$ En este item no se asume dimension finita.

    (a) [*Dem.*] que todo vector se escribe como combinacion lineal unica de vectores de la base.

    (b) [*Dem.*] que un conjunto de vectores es base $\iff$ es l.i. maximal.

18. Un espacio V es de dimension finita (por definicion) si todo conjunto de vectores $l.i$ es finito (no existen conjuntos infinitos de vectores $l.i$).

    (a) [*Dem.*] que todo espacio de dimension finita tiene base.

    (b) [*Dem.*] que dos bases cualesquiera tienen el mismo numero de elementos.

19. La dimension es la cardinalidad de cualquier base. Si S y T son subespacios, [*Dem.*] $dim(S + T) = dim(S) + dim(T) - dim(S \cap T)$.

20. Sea $S = S(w_1, w_2, \ldots w_k)$ el subespacio generado por los vectores w_i. Describir y [*Dem.*] un metodo para encontrar las ecuaciones que definen S.

Formas Bilineales

21. (en este item no se pide demostracion). Una forma bilineal queda univocamente determinada por sus valores en una base. Sean $v, w \in V$ y $V \times V \xrightarrow{\varphi} K$ una forma bilineal, y sea E una base. Sean $[v]_E$, $[w]_E$, y $[\varphi]_E$ las coordenadas de v, w y la matriz de φ en la base E. Entonces $\varphi(v, w) = [v]_E^t[\varphi]_E[w]_E$.

22. Dos matrices A, B se dicen congruentes si existe una matriz inversible P tal que $B = P^t AP$. [*Dem.*] que dos matrices son congruentes $\iff$ son matrices de la misma forma bilineal en distintas bases.

23. Sea $V \times V \xrightarrow{\varphi} K$ una forma bilineal. [*Dem.*] la equivalencia de los siguientes enunciados:

    (a) φ es simetrica. Es decir, $\varphi(v, w) = \varphi(w, v)$.

    (b) Existe una base E tal que $[\varphi]_E$ es una matriz simetrica.

    (c) Para toda base E, $[\varphi]_E$ es una matriz simetrica.

24. Observar que los siguientes enunciados son equivalentes y [*Dem.*] uno cualquiera de ellos (no se requiere una demostracion formal por induccion).

    (a) Para toda forma bilineal simetrica φ existe una base E tal que $[\varphi]_E$ es una matriz diagonal D.

    (b) Toda matriz simetrica es congruente a una matriz diagonal D.

25. Si $K = \mathbb{R}$, [*Dem.*] que la matriz diagonal D en el item 24 puede suponerse compuesta solo de $1's$ y $-1's$.

    (a) [*Dem.*] que en el item 24a el numero de $1's$ (denotado p) y el numero de $-1's$ (denotado q) es el mismo cualquiera sea la base E.

    (b) [*Dem.*] a partir de este hecho (25a) que dos matrices simetricas son congruentes $\iff$ la matriz D en el item 24b es la misma $\iff$ tienen el mismo rango y la misma signatura s, donde s se define como $s = p - q$.

26. (a) Hacer la clasificacion completa de conicas por rango y signatura.

    (b) Basado en lo anterior hacer la clasificacion completa de cuadricas por rango y signatura.

27. Suponer $K = \mathbb{R}$. Enunciar el criterio de Sylvester para formas cuadraticas (o matrices simetricas) definidas positivas (no se requiere demostracion).

Espacios Euclideos

28. Dados tres puntos V, W y Z en el plano real, enunciar el teorema de Pitagoras en terminos de los vectores $V - Z$, $W - Z$ e $V - W$. [*Dem.*] el teorema de Pitagoras en forma geometrica mediante un dibujo.

29. Dados dos puntos V, W en un espacio euclideo V, [*Dem.*] la forma polar $\langle V, W \rangle = 1/2(|V|^2 + |W|^2 - |V - W|^2)$. [*Dem.*] entonces que el teorema de Pitagoras es valido en V.

30. Enunciar el proceso de ortonormalizacion de Grand Schmith. Hacer la demostracion para el caso $n = 3$.

31. Dado un punto $v \in V$ y un subespacio $S \subset V$, definir la proyeccion ortogonal $E(v) \in S$ y [*Dem.*] que minimiza la distancia de v a puntos de S.

32. Dado un subespacio $S \subset V$, definir el complemento ortogonal $S^{\perp}$ y [*Dem.*] que es un complemento.

33. Dado un punto $v \in V$ y un subespacio $S \subset V$, escribir la expresion de la proyeccion ortogonal $E(v) \in S$ en terminos de una base ortonormal de S y [*Dem.*] que la expresion da efectivamente la proyeccion ortogonal.

34. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. [*Dem.*] la ecuacion $\langle A^t X,\, Y\rangle = \langle X,\, AY\rangle$ (producto usual de $\mathbb{R}^n$).

35. Considerar un punto $Y \in \mathbb{R}^n$ y un subespacio $S \subset \mathbb{R}^n$, $S = S(X_1,\, X_2,\, \ldots\, X_k)$, donde los X_i son *l.i.* (pero no necesariamente ortonormales). Considerar la matriz $A = (X_1,\, X_2,\, \ldots\, X_k)$. [*Dem.*] que la matriz A^tA es inversible y que si P es la solucion del sistema $(A^tA)X = A^tY$, entonces $E(Y) = AP$ es la proyeccion ortogonal de Y sobre S.

Transformaciones Lineales

36. Sea $V \xrightarrow{\varphi} W$ una transformacion lineal. [*Dem.*] $dimV = dimNu(\varphi) + dimIm(\varphi)$, donde Nu y Im son el nucleo y la imagen respectivamente.

37. Sea $V \xrightarrow{\varphi} W$ una transformacion lineal. [*Dem.*] la equivalencia de los siguientes enunciados:

    (a) φ es un isomorfismo.

    (b) Existe una base E tal que φE es una base.

    (c) Para toda base E, φE es una base.

38. (en este item no se pide demostracion). Una transformacion lineal queda univocamente determinada por sus valores en una base. Sean $v \in V$ y $V \xrightarrow{\varphi} V$ una transformacion lineal, y sea E una base. Sean $[v]_E$ y $[\varphi]_E$ las coordenadas de v y la matriz de φ en la base E. Entonces $[\varphi(v)]_E = [\varphi]_E[v]_E$.

39. Dos matrices A, B se dicen semejantes, y se denota $A \sim B$, si existe una matriz inversible P tal que $B = P^{-1}AP$. [*Dem.*] que dos matrices son semejantes $\iff$ son matrices de la misma transformacion lineal en distintas bases.

40. [*Dem.*] la implicacion $A \sim B \;\Rightarrow \chi_A(x) = \chi_B(x)$, donde $\chi_A(x)$ es el polinomio caracteristico. Explicar porque entonces puede definirse el polinomio caracteristico de una transformacion lineal.

41. Dada una matriz A de $n \times n$ [*Dem.*] la equivalencia de los siguientes enunciados (en caso de que valgan la matriz se dice diagonalizable):
   (a) Hay una base de K^n formada por vectores propios de A.
   (b) Existe una matriz inversible P tal que $P^{-1}AP = D$, donde D es una matriz diagonal, los elementos de la diagonal son valores propios y las columnas de P son vectores propios.

42. Vectores propios correspondientes a valores propios distintos son *l.i.*. [*Dem.*] esto en el caso $n = 2$. Deducir que si el polinomio caracteristico de una matriz $A \in K^{n \times n}$ tiene n raices distintas, entonces A es diagonalizable. Dar un contraejemplo para la implicacion reciproca.

43. Sea $V \xrightarrow{\varphi} V$, y $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \; \ldots \; W_l$, donde los W_i son subespacios invariantes. Sea $A = [\varphi]_E$, donde $E = E_1, E_2, \ldots E_l$ es una base compuesta por bases E_i de los W_i. Entonces, $\chi_A = \chi_{A_1} \chi_{A_2} \; \ldots \; \chi_{A_l}$, donde $A_i = [\varphi_i]_{E_i}$, y φ es la restriccion de φ_i al subespacio W_i.

44. Dada una matriz $A \in K^{n \times n}$, $\chi_A(x)$, $Tr(A)$ y $det(A)$ indican el polinomio caracteristico, la traza y el determinante respectivamente.
   (a) $\chi_A(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} Tr(A) x^{n-1} + (\textit{terminos de grado} < n-1) + det(A)$ Escribir y [*Dem.*] la formula en el caso $n = 3$.
   (b) [*Dem.*] que si A es diagonalizable entonces $Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$ y $det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$, donde $\lambda_1, \; \lambda_2, \; \ldots, \; \lambda_n$ son los valores propios.

Transformaciones Simetricas y Transformaciones Ortogonales

46. Dada una matriz compleja A, se define $A^* = \overline{A}^{\,t}$, donde $\overline{A}$ es la matriz formada por los conjugados de los elementos de A. Observar que:

   A real $\iff A^* = A^t$, A simetrica $\iff A^* = \overline{A}$, y A real simetrica $\iff A^* = A$.

   [*Dem.*] que los valores propios de una matriz simetrica real son reales.

47. Dada $V \xrightarrow{\varphi} V$, φ^t es la transformacion lineal univocamente determinada por la ecuacion $[\varphi^t]_E = [\varphi]_E^t$, donde E es una base ortonormal. [*Dem.*] la ecuacion $\langle \varphi^t(v), \, w \rangle = \langle v, \, \varphi(w) \rangle$.

48. Dados $V \xrightarrow{\varphi} V$ y $W \subset V$ un subespacio invariante, [*Dem.*]:
   (a) $W^\perp$ es invariante para φ^t.
   (b) (asumir W de dimension finita) W es invariante para φ^{-1}.

49. Sea $V \xrightarrow{\rho} V$, con V euclideo. [*Dem.*] la equivalencia de los siguientes enunciados:

   (a) ρ preserva el modulo.

   (b) ρ preserva el producto interno.

   (c) para cualquier base ortonormal E, la imagen $\rho(E)$ es una base ortonormal.

   (d) Existe una base ortonormal E tal que $[\rho]_E$ es una matriz ortogonal.

   (e) Para toda base ortonormal E, $[\rho]_E$ es una matriz ortogonal.

   (f) Es inversible y $\rho^{-1} = \rho^t$.

50. Observar que los siguientes enunciados son equivalentes y [*Dem.*] uno cualquiera de ellos (no se requiere una demostracion formal por induccion).

   (a) Toda $V \xrightarrow{\varphi} V$ transformacion lineal simetrica ($\varphi = \varphi^t$) es diagonalizable en una base ortonormal. Es decir, hay una base ortonormal formada por vectores propios.

   (b) Toda matriz A real simetrica ($A = A^t$) es diagonalizable por medio de una matriz ortogonal. Es decir, hay una matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP = D$, con D diagonal.

51. [*Dem.*] que toda transformacion lineal $V \xrightarrow{\varphi} V$ de un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ tiene un subespacio invariante de dimension ≤ 2.

52. (a) [*Dem.*] que toda transformacion ortogonal $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\rho} \mathbb{R}^2$ es una rotacion ($\det > 0$) o una simetria respecto a una recta por el origen($\det < 0$).

   (b) Enunciar el teorema de estructura de $O(n, \mathbb{R})$ (grupo ortogonal de un espacio euclideo). Es decir describir la forma precisa en que toda transformacion ortogonal se descompone en rotaciones y simetrias. [*Dem.*] este teorema (no se requiere una demostracion formal por induccion).

53. [*Dem.*] el teorema de estructura de $GL(n, \mathbb{R})$ (grupo general lineal de un espacio euclideo): Toda transformacion lineal inversible se descompone en el producto de una transformacion simetrica (y por lo tanto diagonalizable) y una transformacion ortogonal.

Forma de Jordan

54. Teorema de Hamilton-Cayley, caso nilpotente.

   (a) Sea $V \xrightarrow{S} V$ una transformacion limeal nilpotente. Definir el indice de nilpotencia k, y [*Dem.*] $k \leq n$, donde $n = dim(V)$.

(b) Por definicion el polinomio minimal es $\mu_S(x) = x^k$. Explicar porque (a) significa el Teorema de Hamilton-Cayley para transformaciones lineales nilpotentes.

55. (en este item no se requiere demostracion) Describir informalmente el analisis de un operador nilpotente. Describir como se encuentra la base de Jordan y explicar entonces como queda la matriz en esa base.

56. Sea $V \xrightarrow{A} V$, V de dimension n:

    T1) Sea h un polinomio. [*Dem.*] que $Nu(h(A))$ es un subespacio invariante.

    T2) Sean p, q polinomios coprimos. [*Dem.*]: $Nu(p(A)) \cap Nu(q(A)) = 0$.

    T3) Sea $f = p\,q$, con p, q polinomios coprimos. [*Dem.*]:
    $$Nu(f(A)) = Nu(p(A)) \oplus Nu(q(A)).$$

57. Sea $V \xrightarrow{A} V$, V de dimension n:

    (a) Definir polinomio minimal μ_A de A y [*Dem.*] que existe un tal polinomio.

    (b) Dado un escalar $\lambda \in K$, [*Dem.*]: $\mu_A(\lambda) = 0 \iff \lambda$ es un valor propio.

58. (asumir que $K = \mathbb{C}$). Sea $V \xrightarrow{A} V$, V de dimension n:

    Sea $\mu_A = (x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2} \dots (x - \lambda_l)^{m_l}$ el polinomio minimal (λ_i son las raices distintas, y m_i su multiplicidad en el polinomio mimimal). Sea $S_i = A - \lambda_i I$ de forma que $A = S_i + \lambda_i I$, y sea $R_i = Nu(S_i^{m_i})$. [*Dem.*]:

    T1) Los R_i son subespacios invariantes.

    T2) $R_i \cap R_j = \{0\}$.

    T3) $V = R_1 \oplus R_2 \oplus \ \dots \ R_l$.

59. (a) Dadas matrices A y S cualesquiera, [*Dem.*] $\chi_{(S+yI)}(x) = \chi_S(x - y)$.

    (b) (asumir que $K = \mathbb{C}$). Teorema de Hamilton-Cayley:
    [*Dem.*]: $\chi_A(A) = 0$, o sea, $\mu_A(A)/\chi_A(A)$. (pista: items 43, 58T3, 54 y 59a).

60. (asumir que $K = \mathbb{C}$). Explicar por que y en que sentido los resultados del item 58 reducen el analisis del caso general A al caso de una transformacion lineal nilpotente. Describir informalmente como se encuentra la base de jordan asumiendo que se sabe hacerlo en el caso nilpotente (no explicitar este caso, que es el item 55).