ALGEBRA LINEAL

## PRACTICA 1. PERMUTACIONES Y DETERMINANTES.

NOTACION: Se utilizaran dos formas alternativas para la escritura de una permutación $\sigma \in S_n$:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$, con $a_i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, que significa:

$\sigma(1) = a_1,\ \sigma(2) = a_2,\ \sigma(n-1) = a_{n-1},\ \sigma(n) = a_n$.

b) escritura en ciclos: $\sigma = (a_1 a_2 a_3 \dots a_k)$, con $a_i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, que significa:

$\sigma(a_1) = a_2,\ \sigma(a_2) = a_3,\ \sigma(a_{k-1}) = a_k,\ \sigma(a_k) = a_1$, y $\sigma(x) = x$ para todo otro $x \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

De esta forma, en $S_6$ por ejemplo, las notaciones $(123)(34)(26)$ y $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ corresponden a la misma permutación.

EJERCICIOS

1. Sean $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$ las siguientes permutaciones:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   (i) Hallar $\sigma_1\sigma_2,\ \sigma_2\sigma_1,\ \sigma_2\sigma_3,\ (\sigma_1\sigma_2)\sigma_3,\ \sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$ y $\sigma_3\sigma_2\sigma_1$.

   (ii) Hallar (contando las inversiones) el signo de $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \varphi_1 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$, y $\varphi_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_1$.

   (iii) Descomponer $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \varphi_1$ y $\varphi_2$ como:

      a. producto de ciclos disjuntos.
      b. producto de transposiciones cualesquiera.
      c. producto de transposiciones del tipo $(i\ i+1)$.
      d. producto de transposiciones del tipo $(1\ i)$.

2. Probar que si $\sigma,\ \tau \in S_n$ son permutaciones disjuntas $\sigma\tau = \tau\sigma$.

3. Hallar las inversas $\sigma_1^{-1},\ \sigma_2^{-1},\ \sigma_3^{-1}$ y resolver todos los items del ejercicio anterior con $\sigma_i^{-1}$ en lugar de $\sigma_i$. Se sugiere encontrar la manera general de invertir un ciclo, y usarla para evitar las cuentas.

4. Descomponer en producto de ciclos disjuntos y calcular el orden de:
   $\sigma = (1\,2\,3)(4\,5)(1\,6\,7\,8\,9)(1\,5)$, $\varphi = (1\,4)(1\,2\,3)(4\,5)(1\,4)$.

5. Determinar el signo de las siguientes permutaciones:

   (i) $\sigma_1 = (1\,2\,3)(1\,2)$, $\sigma_2 = (1\,2\,3\,4\,5)(4\,5)$, $\sigma_3 = (1\,2)(1\,3)(1\,4)(1\,5)$.

   (ii) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$

   (iii) $\varphi = (a_1 a_2 a_3 \dots a_k)$.

   ¿El signo de las permutaciones anteriores depende del $S_n$ donde están?.

6. **Cálculo de determinantes por el algoritmo de Gauss:**

   (i) Observar que luego de una operación elemental, el determinante no cambia, cambia de signo, o queda multiplicado por un escalar ($\neq 0$), según sea el caso.

   (ii) El determinante de una matriz escalonada cuadrada es el producto de los elementos de la diagonal.

   (iii) Deducir de los dos items anteriores un método para calcular determinantes por medio del algoritmo de Gauss, y calcular con este método los determinantes del ejercicio 7 (notar que en cuanto aparezca una columna sin pivote el determinante es nulo).

7. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$\text{i)} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{ii)} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{iii)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{iv)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{v)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & 3 & -4 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{vi)} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

8. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$a) \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ c-di & a-bi \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{pmatrix} \quad f) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad g) \begin{pmatrix} 0 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad h) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$$

   donde $\omega = \cos(\frac{2}{3}\pi) + i\,\sin(\frac{2}{3}\pi)$.

9. (i) Determinar si los siguientes productos aparecen en el determinante de orden 5:
   a) $a_{13}a_{24}a_{23}a_{41}a_{35}$, b) $a_{21}a_{13}a_{34}a_{55}a_{42}$.

(ii) En el determinante de orden 6, determinar los signos de los siguientes productos:

a) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$, b) $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$.

(iii) Encuentre todos los posibles valores de $j$ y $k$ tales que el producto $a_{2j}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$ aparezca en el determinante de orden 5 con signo "+".

(iv) Escriba todos los términos del determinante de orden 4 que contienen al factor $a_{23}$ y llevan signo "+".

(v) Usando únicamente la definición del determinante calcular los coeficientes de $x^3$ y $x^4$ en la expresión:

$$f(x) = det\begin{pmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

10. Sea $A$ una matriz cualquiera, y sea $x = det(A)$. Calcular las expresiones:

a) $f(x) = det(2A)$,

b) $g(x) = det(-A)$,

c) $h(x) = det(B)$,

donde $B$ es la matriz que tiene como primer fila a la segunda fila de $A$, como segunda fila a la tercer fila de $A$, y asi siguiendo, hasta la anteúltima fila que es la ultima fila de $A$, y la última fila que es la primer fila de $A$.

11. (i) Si $A \in K^{n\times n}$, $B \in K^{m\times m}$ y $C \in K^{n\times m}$, sea $M \in K^{(n+m)\times(n+m)}$ la matriz de bloques definida por $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Probar que $\det(M) = \det(A)\det(B)$.

(ii) Ver que en general es falso que si $M$ es una matriz de bloques $M = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}$, se tenga que $\det(M) = \det(A)\det(B) - \det(C)\det(D)$.

12. Dados $n$ números (o elementos de un cuerpo cualquiera) $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n$, se llama determinante de Vandermonde al determinante formado poniendo en la fila $i$ a las potencias de $a_i$:

$$V(a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n) = det\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Calcular $V(a_1,\ a_2)$, $V(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $V(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$. Adivinar una fórmula general.

13. Sean $a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$ todos distintos y sea $P \in K[x]$ el polinomio

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \ldots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}.$$ Hallar todas las raíces de $P$.

(Sugerencia: Hacer primero los casos $n = 2$, $n = 3$, conjeturar el caso general y usar inducción.)

14. Calcular los siguientes determinantes:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & \cdots & \epsilon^{n-1} \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & \cdots & \epsilon^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \epsilon^{n-1} & \epsilon^{(n-1)2} & \cdots & \epsilon^{(n-1)^2} \end{vmatrix}$$

donde $\epsilon = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\text{sen}(\frac{2\pi}{n})$.

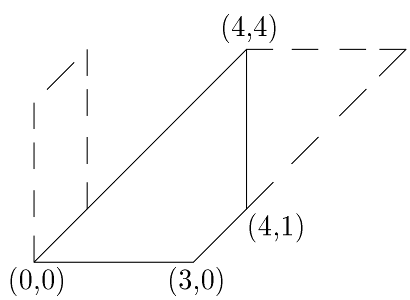
15. Sean

$$P_n = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad Q_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Probar que $\dfrac{P_n}{Q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1}}}}}}$

16. Calcular usando determinantes:

   (i) El área del cuadrilátero de vértices (0, 0), (3, 0), (4, 1), (4, 4).
   Sugerencia:




   (ii) El volumen del paralelepípedo que tiene a (0, 2, 0), (0, 0, 0), (2, 0, 0), (1, 1, 5) como vértices adyacentes.