

ALGEBRA LINEAL

PRACTICA 2. MATRICES.

1. Encuentre un contraejemplo para cada uno de las siguiente afirmaciones relativas al producto de matrices:

- (i) $AB = BA$
- (ii) $(AB)^2 = A^2B^2$
- (iii) $AB = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ ó } B = 0$
- (iv) $AB = AC \text{ y } A \neq 0 \Rightarrow B = C$
- (v) $AB = 0 \Rightarrow BA = 0$
- (vi) $A^j = 0 \Rightarrow A = 0$
- (vii) $A^2 = A \Rightarrow A = 0 \text{ ó } A = I$.

2. Caracterizar el conjunto $\{A \in \mathbb{K}^{3 \times 3} / AB = BA \ \forall B \in \mathbb{K}^{3 \times 3}\}$.

3. Calcular:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n.$$

4. Resolver las ecuaciones matriciales en el cuerpo \mathbb{R} :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. En cada uno de los siguientes casos, hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ que verifique:

- (i) $A \neq I$ y $A^3 = I$
- (ii) $A \neq 0$; $A \neq I$ y $A^2 = A$.

6. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- (i) Probar que $A = 0$ si y sólo si $\text{tr}(A.A^t) = 0$.
- (ii) Probar que $A.A^t$ y $A^t.A$ son simétricas. ¿ $A.A^t = A^t.A$?
- (iii) ¿La suma de dos matrices simétricas es simétrica? ¿Y el producto?

7. Sea $A \in K^{2 \times 2}$ y sea $P \in K[x]$, $P(x) = x^2 - \text{tr}(A).x + \det(A)$. Probar que $P(A) = A^2 - \text{tr}(A).A + \det(A).I_2 = 0$ para cada una de las siguientes matrices

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. **Matrices escalonadas.** Una matriz es *escalonada* si verifica lo siguiente:

- 1) El primer coeficiente no nulo de cada fila es 1, y se llama el *pivote* de la fila.
- 2) El pivote de cada fila (a partir de la segunda) se encuentra estrictamente más lejos (es decir, en una columna de índice estrictamente mayor) que el pivote de la fila anterior.
- 3) Puede tener abajo un cierto número de filas nulas.
- 4) Una matriz escalonada se dice *reducida* si la columna arriba de cada pivote también es de ceros.

Observar que en una matriz escalonada de n columnas y k pivotes, las primeras k filas son independientes (y son las únicas no nulas). Hay k columnas que tienen pivote, son independientes, y generan todas las columnas. Hay $n - k$ columnas que no tienen pivote.

Toda matriz puede llevarse por operaciones elementales de filas a la forma escalonada. El algoritmo para hacerlo se llama método de Gauss o del “pivote”.

Una matriz *ampliada* es simplemente una matriz dividida en dos bloques $(A|B)$.

9. El rango de una matriz escalonada es igual a su número de filas no nulas. El algoritmo de Gauss no modifica el rango de una matriz. Calcular el rango de las siguientes matrices, por ejemplo, llevándolas a la forma escalonada.

$$\text{i) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{iii) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{iv) } \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{v) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{vi) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. Calcular el rango de $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ para cada $k \in \mathbb{R}$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k - 2 \end{pmatrix}.$$

11. **Matrices elementales.** Las matrices elementales son el resultado de aplicarle una operación elemental a la matriz identidad I .

- (i) Calcular todas las matrices elementales de $K^{3 \times 3}$.
- (ii) Las matrices elementales son inversibles.
- (iii) Calcular el determinante de las matrices elementales.
- (iv) Sea α una operación elemental de filas, β una operación elemental de columnas, $P = \alpha(I)$ y $Q = \beta(I)$ las correspondientes matrices elementales. Dada una matriz A , verificar, demostrar o convencerse que se tiene $\alpha(A) = PA$, es decir, $\alpha(A) = \alpha(I)A$, y $\beta(A) = AQ$, es decir, $\beta(A) = A\beta(I)$.

- (v) Deducir que si B proviene de A luego de una aplicación sucesiva de operaciones elementales de filas y de columnas, se tiene $B = PAQ$, donde P resulta de aplicarle las operaciones de fila a I , y Q resulta de aplicarle las operaciones de columna a I .
- (vi) Las matrices P, Q en el item anterior son inversibles.

12. Para las siguientes matrices A, B sobre el cuerpo \mathbb{R} decidir si existen matrices inversibles P, Q tales que $B = PAQ$, y en caso afirmativo hallarlas.

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad d) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad f) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

13. **Método algorítmico para calcular la inversa de una matriz.** Dada una matriz A , su inversa se calcula eficientemente con el siguiente ALGORITMO:

- 1) Formar la matriz ampliada $(A | I)$.
- 2) Operando sobre la matriz ampliada llevar por el método de Gauss el bloque A a la forma escalonada. Si aparece una columna sin pivote, la matriz no es inversible.
- 3) Continuar fabricando ceros, ahora arriba de la diagonal, hasta obtener una matriz de la forma $(I | B)$.

Por el ejercicio 11. se tiene que $BA = I$, con B inversible, de donde se sigue que B es la inversa de A .

14. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Escribir, si es posible, A y B como producto de matrices elementales. Calcular de ser posible A^{-1} y B^{-1} usando esta escritura.

15. **Otro método para calcular la inversa de una matriz.** Enfrentado a una matriz A , en la mayoría de los casos su inversa puede calcularse mas rapido pero con mas riesgo de la siguiente forma (que no es un algoritmo, y por lo tanto hay que pensar, actividad que a veces es preferible evitar).

- 1) Formar la matriz ampliada $(I | A | I)$.
- 2) Ir fabricando ceros en el bloque del centro hasta llegar a la matriz identidad I . Para ello, observarlo bien, y astutamente decidirse por una operación, ya sea de fila o de columna. Si se realiza una operación de fila, hacer la misma operación en el bloque izquierdo, y dejar el derecho como está. Si se realiza una operación de columna, hacer la misma operación en el bloque derecho, y dejar el izquierdo como está.

3) Con un poco de suerte, se termina obteniendo una matriz de la forma $(P|I|Q)$.

Por el ejercicio 10. se tiene que $PAQ = I$, con P y Q inversibles, de donde se sigue que $B = QP$ es la inversa de A .

16. Decidir si las siguientes matrices son inversibles y, en caso afirmativo, exhibir sus inversas:

$$\begin{aligned}
 & a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e) \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 & f) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad g) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad h) \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad i) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
 & j) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad k) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad l) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

17. Sea A nilpotente ($A^n = 0$). Demostrar que $I - A$ es inversible.

(pista: recordar la serie de $\frac{1}{1-x}$).

18. Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Probar:

- (i) Si A es inversible entonces $AB = 0 \Rightarrow B = 0$ y $AB = AC \Rightarrow B = C$
- (ii) Si A no es inversible, existe $B \neq 0, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ tal que $AB = 0$.
- (iii) A, B inversibles $\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

19. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar:

- (i) $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ inversibles $\Rightarrow A + B$ es inversible
- (ii) A inversible $\iff A^t$ inversible.
- (iii) A nilpotente (es decir, $\exists j \in \mathbb{N} / A^j = 0$) $\Rightarrow A$ no es inversible.

Nota: Dada $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, se llama **matriz transpuesta de A** a la matriz $A^t \in \mathbb{K}^{n \times n}$ definida por $(A^t)_{ij} := (A)_{ji}, \forall 1 \leq i, j \leq n$.

20. (i) Sea $A \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$. Dar una condición necesaria y suficiente para que $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$.
- (ii) Probar que toda matriz en $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$ de determinante 1 se puede escribir como producto de potencias positivas y negativas de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- (iii) Probar que toda matriz en $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$ con inversa en $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$ puede representarse como producto de potencias positivas y negativas de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- (iv) Sea $R \in \mathbb{Z}^{n \times n}$. Probar que existen $P, Q \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, inversibles en $\mathbb{Z}^{n \times n}$, tales que $P.Q.R$ es diagonal.

Resolución de sistemas e inversa de matrices por el método de Cramer

21. Calcular el determinante, la adjunta y la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$\text{i) } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -5 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{iii) } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{iv) } \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta & 0 \\ \text{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{v) } \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\text{sen} \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

22. Sea A una matriz inversible. Calcular $\det(\text{adj} A)$. ¿Qué pasa si A no es inversible?

23. Calcular las inversas de

$$\text{i. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & \dots & \epsilon^{n-1} \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & \dots & \epsilon^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \epsilon^{n-1} & \epsilon^{(n-1)2} & \dots & \epsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \quad \text{ii. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\text{sen} \varphi \\ 0 & \text{sen} \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

24. Resolver los siguientes sistemas lineales sobre \mathbb{R} empleando la regla de Cramer:

$$\text{i) } \begin{cases} 3x_1 - x_2 = -3 \\ x_1 + 7x_2 = 4 \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{iii) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 4 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$