1er. cuatrimestre 2006

Algebra Lineal

PRACTICA 3.

I) Ejercicio olvidado Práctica 2.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -10 & 13 & 14 & 15 \\ 12 & -9 & 14 & 15 \\ 12 & 13 & -8 & 15 \end{pmatrix}$$

i) Comprobar que $\det(A) = 10648$.

ii) Hallar los cuerpos $\mathbb{Z}_p$ tales que A no es inversible.

iii) Hallar soluciones no triviales del sistema $Ax = 0$ en los cuerpos hallados en ii) donde $x \in \mathbb{Z}_p^4$.

iv) Encontrar el rango de A en esos cuerpos.

II) REPASO. METODO DE GAUSS, OPERACIONES ELEMENTALES.

Matrices escalonadas

Una matriz es *escalonada* si verifica lo siguiente:

1) El primer coeficiente no nulo de cada fila es 1, y se llama el *pivote* de la fila.

2) El pivote de cada fila (a partir de la segunda) se encuentra estrictamente mas lejos (es decir, en una columna de índice estrictamente mayor) que el pivote de la fila anterior.

3) Puede tener abajo un cierto numero de filas nulas.

4) Una matriz escalonada se dice *reducida* si la columna arriba de cada pivote tambien es de ceros.

Observar que en una matriz escalonada de n columnas y k pivotes, las primeras k filas son independientes (y son las únicas no nulas). Hay k columnas que tienen pivote, son independientes, y generan todas las columnas. Hay $n - k$ columnas que no tienen pivote.

Toda matriz puede llevarse por operaciones elementales de filas a la forma escalonada. El algoritmo para hacerlo se llama metodo de Gauss o del "pivote".

Una matriz *ampliada* es simplemente una matriz dividida en dos bloques $(A\,|B)$.

Sistemas de ecuaciones lineales

El conjunto S de soluciones de un sistema lineal homogéneo con n variables es un subespacio del espacio K^n. Resolver el sistema homogéneo consiste en hallar una base para S. Toda solución será entonces combinación lineal de las soluciones de la base.

El conjunto de soluciones A de un sistema no homogéneo es un transladado $A = p_0 + S$ del conjunto de soluciones S del sistema homogéneo correspondiente, donde p_0 es una solución particular cualquiera. Resolver el sistema consiste en hallar p_0 y en resolver el sistema homogéneo.

METODO PARA RESOLVER SISTEMAS LINEALES:

Los sistemas lineales tienen una matriz ampliada asociada, por ejemplo, la matriz asociada al sistema en el ejercicio 1. a) aquíabajo es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & | & 4 \\ 3 & 4 & -2 & | & 11 \\ 3 & -2 & 4 & | & 11 \end{pmatrix}$$

Así, las filas corresponden a las ecuaciones, las columnas corresponden a las variables, y la columna ampliada a los términos independientes.

Si se aplican operaciones elementales de filas, la matriz resultante corresponde a un sistema que tiene el mismo conjunto de soluciones.

COROLARIO (del método de Gauss): Dado cualquier sistema lineal, existe un sistema lineal escalonado (es decir, cuya matriz es escalonada) que tiene el mismo conjunto de soluciones.

El conjunto de soluciones de un sistema homogéneo escalonado de m ecuaciones (y n variables) tiene dimension $n - m$, y una base se encuentra immediatamente.

El metodo para resolver sistemas es llevarlos a la forma escalonada. Los sistemas se resuelven por medio del siguiente ALGORITMO:

Supongamos n variables con m ecuaciones:

1) Se escribe la matriz ampliada asociada (A, b).

2) Por medio del método de Gauss aplicado a la matriz ampliada se lleva la parte A a la forma escalonada, que tendrá $k \leq m$ pivotes (aparecen filas nulas abajo si $k < m$).

3) Las variables correspondientes a las $n - k$ columnas sin pivote se pasan al otro lado, y se piensan como parámetros independientes. Así, el espacio de soluciones del sistema homogéneo tendrá dimensión $n - k$.

4) Se resuelve el sistema escalonado empezando desde abajo (si a la columna ampliada le queda un número no nulo debajo de la fila k, el sistema no tiene soluciones).

5) Notar que esta última parte es equivalente a continuar fabricando ceros, ahora arriba de cada pivote, quedando asíuna matriz escalonada reducida, cuyo sistema "ya está resuelto". Se tiene asíla solución general (en término de los parámetros).

6) Dándole el valor cero a todos los parámetros se obtiene una solución particular p_0.

7) Para obtener $n - k$ soluciones independientes del sistema homogéneo correspondiente se les van

dando valores arbritrarios convenientes a los $n-k$ parámetros (por ejemplo, un parámetro $=1$ y todos los demás $=0$, y asíen forma sucesiva con cada parámetro).

El conjunto de soluciones asíobtenido es el conjunto de soluciones del sistema original.

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$a)\left\{\begin{array}{rcr} 2x_1-x_2-x_3 &=& 4\\ 3x_1+4x_2-2x_3 &=& 11\\ 3x_1-2x_2+4x_3 &=& 11\end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{rcr} x_1-2x_2+x_3+x_4 &=& 1\\ x_1-2x_2+x_3-x_4 &=& -1\\ x_1-2x_2+x_3+5x_4 &=& 5\end{array}\right.$$

$$c)\left\{\begin{array}{rcr} x_1+x_2-3x_3 &=& -1\\ 2x_1+x_2-2x_3 &=& 1\\ x_1+x_2+x_3 &=& 3\\ x_1+2x_2-3x_3 &=& 1\end{array}\right. \qquad d)\left\{\begin{array}{rcr} 2x_1+x_2+3x_3 &=& 2\\ x_1+3x_2+x_3 &=& 5\\ x_1+x_2+5x_3 &=& -7\\ 2x_1+3x_2-3x_3 &=& 14\end{array}\right.$$

$$e)\left\{\begin{array}{rcr} x_1-2x_2+3x_3-4x_4 &=& 4\\ x_2-x_3+x_4 &=& -3\\ x_1+3x_2-3x_4 &=& 1\\ -7x_2+3x_3+x_4 &=& -3\end{array}\right. \qquad f)\left\{\begin{array}{rcr} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4 &=& 0\\ 3x_1-x_2+2x_3-7x_4 &=& 0\\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4 &=& 0\\ x_1-2x_2+4x_3-7x_4 &=& 0\end{array}\right.$$

$$g)\left\{\begin{array}{rcr} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4 &=& 0\\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4 &=& 0\\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4 &=& 0\\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4 &=& 0\end{array}\right. \qquad h)\left\{\begin{array}{rcr} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 &=& 7\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5 &=& -2\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_6 &=& 23\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5 &=& 12\end{array}\right.$$

2. Resuelva los siguientes sistemas y compare los conjuntos de soluciones:

$$\text{i) } \{x+2y-3z=4 \qquad \text{ii) } \left\{\begin{array}{rcr} x+2y-3z &=& 4\\ x+3y+z &=& 11\end{array}\right. \qquad \text{iii) } \left\{\begin{array}{rcr} x+2y-3z &=& 4\\ x+3y+z &=& 11\\ 2x+5y-4z &=& 13\end{array}\right.$$

3. Para cada uno de los siguientes sistemas lineales homogéneos, determinar todos los $k\in\mathbb{R}$ para los cuales el sistema tiene alguna solución no trivial:

$$\text{i)}\left\{\begin{array}{rl} x_1+kx_2+x_3 &=0\\ (k+1)x_2+x_3 &=0\\ (k^2-4)x_3 &=0\end{array}\right. \qquad \text{ii)}\left\{\begin{array}{rl} x_1+kx_2+x_3 &=0\\ 2x_1+x_3 &=0\\ 2x_1+kx_2+kx_3 &=0\end{array}\right.$$

4. Dado el sistema

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x_1-x_2+x_3 &=\alpha_1\\ 3x_1+x_2+4x_3 &=\alpha_2\\ -x_1+3x_2+2x_3 &=\alpha_3\end{array}\right.$$

Determinar los valores de α_1, α_2, $\alpha_3\in\mathbb{R}$ para los cuales el sistema admite solución.

5. Determinar para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$ cada uno de los siguientes sistemas tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones:

$$\text{i)}\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 &= b \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= -1 \end{cases} \qquad \text{ii)}\begin{cases} ax_1 + 2x_2 + ax_3 &= 1 \\ ax_1 + (a+4)x_2 + 3ax_3 &= -2 \\ -ax_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ (a+2)x_2 + (3a+1)x_3 &= b \end{cases}$$

6. (i) Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}$$

Probar que el sistema homogéneo correspondiente tiene solución única si y sólo si a , b , c y d no son todos iguales a cero.

(ii) Analizar la validez de la afirmación anterior si $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$.

7. Encuentre un sistema con coeficientes reales cuya solución general sea

$$\{(1,1,0) + \lambda(1,2,1) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

III) ESPACIOS VECTORIALES.

1. Probar en cada caso que el conjunto V, con la suma y el producto por escalares definidos, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$:

   (i) $\mathrm{V} = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)/a_i \in \mathbb{K}\ \forall\, i \in \mathbb{N}\}$, el conjunto de todas las sucesiones de elementos de $\mathbb{K}$.

   a. $+ : (a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}}$

   b. $. : k.(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (k.a_i)_{i\in\mathbb{N}}$

   (ii) Dado X un conjunto, sea $\mathrm{V} = \mathbb{K}^X = \{f : X \to \mathbb{K}$ tal que f es una función$\}$.

   a. $+ : (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall\, x \in X$

   b. $. : (k.f)(x) = k.f(x) \quad \forall\, x \in X$

2. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios de V como $\mathbb{K}$-espacio vectorial:

   (i) $\mathrm{S}_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 / v = a(1,0,0) + b(1,1,1)\,;\, a, b \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

   (ii) $\mathrm{S}_2 = \{ai/a \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{V} = \mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

   (iii) $\mathrm{S}_3 = \{f \in \mathbb{K}[X]/f = 0$ ó $\mathrm{gr} f \geq 2\}$, $\mathrm{V} = \mathbb{K}[\mathrm{X}]$

   (iv) $\mathrm{S}_4 = \{f \in \mathbb{K}[X]/f = 0$ ó $\mathrm{gr} f \leq 5\}$, $\mathrm{V} = \mathbb{K}[\mathrm{X}]$

(v) $\mathrm{S}_5 = \{M \in \mathbb{K}^{4\times 4} \,/\, M^t = M\}$, $\mathrm{V} = \mathbb{K}^{4\times 4}$

(vi) $\mathrm{S}_6 = \{M \in \mathbb{K}^{3\times 3} \,/\, \mathrm{tr}(M) = 0\}$, $\mathrm{V} = \mathbb{K}^{3\times 3}$

(vii) $\mathrm{S}_7 = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\mathrm{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

(viii) $\mathrm{S}_8 = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \,/\, f''(1) = f(2)\}$, $\mathrm{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

(ix) Dados a y $b \in \mathbb{R}$ fijos, $\mathrm{S}_9 = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \,/\, f'' + af' + bf = 0\}$, $\mathrm{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

(x) $\mathrm{S}_{10} = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \,/\, \int_0^1 f(x)dx = 0\}$, $\mathrm{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

(xi) $\mathrm{S}_{11} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \exists\, k \in \mathbb{N}$ tal que $a_r = 0\ \forall\, r \geq k\}$, $\mathrm{V} = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

3. (i) Sean S y T subespacios de V. Probar que $S \cup T$ es un subespacio de V si y sólo si $S \subseteq T$ ó $T \subseteq S$.

   (ii) Encontrar subespacios S y T de $\mathbb{R}^2$ tales que $S \cup T$ no sea subespacio.

4. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$:

   (i) $\mathbb{K}^n$

   (ii) $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}] = \{f \in \mathbb{K}[X] \,/\, f = 0$ ó $\mathrm{gr}(f) \leq n\}$

   (iii) $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$

   (iv) $\mathbb{K}^{n\times n}$

   (v) $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

5. Encontrar un sistema de generadores para los sigiuentes espacios vectoriales sobre K:

   (i) $S_1 = \{(x, y, z) :\ x + y - z = 0,\ x - y = 0\}$, $\qquad K = \mathbb{R}$

   (ii) $S_2 = \{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_7)^3 : x + z = 0,\ 2y + z = 0,\ x + 3y = 0\}$, $\qquad K = \mathbb{Z}_7$

   (iii) $S_3 = \{A \in \mathbb{Q}^{3\times 3} :\ A = -A^t\}$, $\qquad K = \mathbb{Q}$

   (iv) $S_4 = \{f \in \mathbb{R}_4[x] :\ f(1) = 0,\ f(2) = f(3)\}$ $\qquad K = \mathbb{R}$

   (v) $S_5 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} :\ a_1 + 2a_2 - a_3 = 0,\ a_2 + a_4 = 0\}$ $\qquad K = \mathbb{R}$

   (vi) $S_6 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) :\ f''' = 0\}$, $\qquad K = \mathbb{R}$

6. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $v_1 , v_2 , v_3 \in \mathrm{V}$. Probar que si $v_1 + 3v_2 - v_3 = 0 = 2v_1 - v_2 - v_3$ entonces $< v_1 , v_2 , v_3 >=< v_3 >$.

7. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas

   (i) Sea V un K-espacio vectorial y sean $v, w \in V,\ k \in K$.
   Entonces $< v, w >=< v, w + k.v >$.

   (ii) Sean $v_1, v_2, v_3, v_4, w \in \mathbb{R}^7$ tales que $< v_1, v_2, w >=< v_3, v_4, w >$.
   Entonces $< v_1, v_2 >=< v_3, v_4 >$.

   (iii) Sea V un K-espacio vectorial y sean $v_1, \ldots, v_n, w \in V$.
   $< v_1, \ldots, v_n, w >=< v_1, \ldots, v_n > \Leftrightarrow w \in < v_1, \ldots, v_n >$.

8. Sea $S =< (1,-1,2,1),(3,1,0,-1),(1,1,-1,-1) > \subseteq \mathbb{R}^4$.

    (i) Determinar si $(2,1,3,5) \in S$.
    (ii) Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.
    (iii) Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$.
    (iv) Encontrar ecuaciones implícitas para S.

9. Probar que $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \,/\, f'' + f = 0\} =< \operatorname{sen} x \,,\, \cos x >$.

    Sugerencia: Probar que si $f'' + f = 0$, entonces $\frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2}) \operatorname{sen} x}{\cos x}$ es una función constante en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

10. Decidir si las siguientes sucesiones de vectores son linealmente independientes sobre $\mathbb{K}$:

    (i) $(1,2,3)\,,\,(2,3,1)\,,\,(1,1,4)\,,\,(5,1,1)$ en $\mathbb{R}^3\,,\, \mathbb{K} = \mathbb{R}$
    (ii) $(1-i, i)\,,\,(2,-1+i)$ en $\mathbb{C}^2$ para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
    (iii) $(3+\sqrt{2}\,,1+\sqrt{2}),\ (7,\ 1+2\sqrt{2})$ en $\mathbb{R}^2$, para $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
    (iv) $(1-X)^3\,,\,(1-X)^2\,,\,1-X\,,\,1$ en $\mathbb{K}[X]$
    (v) $f(x) = \operatorname{sen} x\,,\, g(x) = \cos x$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\,,\, \mathbb{K} = \mathbb{R}$
    (vi) $f(x) = e^x\,,\, g(x) = x\,,\, h(x) = e^{-x}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\,,\, \mathbb{K} = \mathbb{R}$
    (vii) $u = (1,0,1,0,1,\dots)\,,\, v = (0,1,0,1,0,\dots)\,,\, w = (1,1,0,1,1,0,\dots)$ en $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

11. Sean $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ todos distintos no nulos. Probar que las funciones $e^{\alpha_1 x}, ..., e^{\alpha_n x}$ son l.i. sobre $\mathbb{R}$.

    Sugerencia: suponer que existen $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que $\sum_{i=1}^n c_i e^{\alpha_i x} = 0$, derivar $n-1$ veces y obtener un sistema.

12. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ es un conjunto linealmente independiente:

    (i) $\{(1,2,k)\,,\,(1,1,1)\,,\,(0,1,1-k)\}$.
    (ii) $\{(k,1,0)\,,\,(3,-1,2)\,,\,(k,2,-2)\}$.

13. Sean $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Probar que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$ si y sólo si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$.

14. Sea V un espacio vectorial sobre K. Probar

    (i) $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\} \subseteq V$ es l.i. $\Leftrightarrow \{v_1, \dots, v_j \dots, v_i \dots, v_n\} \subseteq V$ es l.i.
    (ii) $\lambda \in K \setminus \{0\}$, $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_n\} \subseteq V$ es l.i. $\Leftrightarrow \{v_1, \dots, \lambda v_i \dots, v_n\} \subseteq V$ es l.i.
    (iii) $\lambda \in K$, $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\} \subseteq V$ es l.i. $\Leftrightarrow \{v_1, \dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_n\} \subseteq V$ es l.i.

    Notar que (a), (b) y (c) justifica el "método de triangulación" para analizar la dependencia o independencia lineal de vectores en K^m.

15. Hallar una base y la dimensión de los siguientes $\mathbb{K}$-espacios vectoriales

(i) $< (1,4,-2,1)\,,\,(1,-3,-1,2)\,,\,(3,-8,-2,7) >\,,\ \mathbb{K}=\mathbb{R}$

(ii) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4\,/\,x_1+x_2+x_3+x_4=0\}\ ,\ \mathbb{K}=\mathbb{R}$

(iii) $\mathbb{C}\ ,\quad \mathbb{K}=\mathbb{R}$ y $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

(iv) $\{f\in\mathbb{R}[X]\,/\,f=0$ ó $\mathrm{gr}(f)\leq 3$ y $f(2)=f(-1)\}\ ,\ \mathbb{K}=\mathbb{R}$

(v) $\{f\in\mathbb{R}[X]\,/\,f=0$ ó $\mathrm{gr}(f)\leq 3$ y f es un múltiplo de $(x^2-2)\}\ ,\ \mathbb{K}=\mathbb{R}$

(vi) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\,/\,a_i=a_j\ \forall\, i,j\,\}$

16. (i) Probar que el conjunto $\{(1,0,0)\,,\,(0,i,0)\,,\,(1,1,i)\}$ es base de $\mathbb{C}^3$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial pero no como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Calcular la dimensión de $\mathbb{C}^3$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

(ii) Probar que el conjunto $\{e_1,\ldots,e_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial pero no como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

(iii) Probar que $\{e_1,\ldots,e_n,ie_1,\ldots,ie_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. ¿Cuál es la dimensión de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial?

17. Completar los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V indicado:

(i) $\{(1,1,1,1)\,,\,(0,2,1,1)\}\ ,\ \mathrm{V}=\mathbb{R}^4\ ,\ \mathbb{K}=\mathbb{R}$

(ii) $\{X^3-2X+1\,,\,X^3+3X\}\ ,\ \mathrm{V}=\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]\ ,\ \mathbb{K}=\mathbb{R}$

(iii) $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\i&1\end{pmatrix}\,,\,\begin{pmatrix}0&i\\1&1\end{pmatrix}\,,\,\begin{pmatrix}0&2\\1&1\end{pmatrix}\right\}\ ,\ \mathrm{V}=\mathbb{C}^{2\times 2}\ ,\ \mathbb{K}=\mathbb{R}$ y $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

18. Extraer una base de S de cada uno de los siguientes sistemas de generadores:

(i) $\mathrm{S}=<(1,1,2)\,,\,(1,3,5)\,,\,(1,1,4)\,,\,(5,1,1)>\subseteq\mathbb{R}^3,\mathbb{K}=\mathbb{R}$

(ii) $\mathrm{S}=<X^2+2X+1\,,\,X^2+3X+1\,,\,X+2>\subseteq\mathbb{R}[X],\mathbb{K}=\mathbb{R}$

(iii) $\mathrm{S}=<\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\,,\,\begin{pmatrix}0&i\\1&1\end{pmatrix}\,,\,\begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix}\,,\,\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}>\subseteq\mathbb{C}^{2\times 2}\ ,\ \mathbb{K}=\mathbb{R}$ y $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

19. Hallar la dimensión del $\mathbb{R}$-espacio vectorial S para cada $k\in\mathbb{R}$ en los siguientes casos:

(i) $\mathrm{S}=<(1,k,1),\,(-1,k,1),\,(0,1,k)>\subset\mathbb{R}^3$

(ii) $\mathrm{S}=<\begin{pmatrix}1&k\\-1&2\end{pmatrix}\,,\,\begin{pmatrix}k&1\\0&2k\end{pmatrix}\,,\,\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}>\subset\mathbb{R}^{2\times 2}$

(iii) $\mathrm{S}=\{x\in\mathbb{R}^3/Ax=0\}$ siendo $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$

$$A=\begin{pmatrix}1&-k&-1\\-1&1&k^2\\1&k&k-2\end{pmatrix}$$

20. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales
$$< (-2,1,6),(3,0,-8) > = < (1,k,2k),(-1,-1,k^2-2),(1,1,k) >.$$

21. En cada uno de los siguientes casos caracterizar los subespacios $S \cap T$ y $S+T$ de V. Determinar si la suma es directa:

   (i) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z)/3x-2y+z=0\}$ y $T = \{(x,y,z)/x+z=0\}$
   (ii) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z)/3x-2y+z=0\,,\, x-y=0\}$ y $T = < (1,1,0),(5,7,3) >$
   (iii) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$, $S = < (1,1,3),(1,3,5),(6,12,24) >$ y $T = < (1,1,0),(3,2,1) >$
   (iv) $\mathrm{V} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]/f(1)=0\}$ y $T = < 1\,,\, \mathrm{X}\,,\, \mathrm{X}^2\,,\, \mathrm{X}^3+2\mathrm{X}^2-\mathrm{X}\,,\, \mathrm{X}^5 >$
   (v) $\mathrm{V} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]/f(0)=0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]/f'(0)=f''(0)=0\}$

22. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $S \cap T = < (0,1,1) >$, siendo
$S = \{x \in \mathbb{R}^3/x_1+x_2-x_3=0\}$ y $T = < (1,k,2),(-1,2,k) >$.

23. (i) Sean $S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,/\, f(0)=0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,/\, f$ es constante$\}$. Probar que S y T son subespacios de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y que $S \oplus T = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
   (ii) Sean $S = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \,/\, A = A^t\}$ y $T = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \,/\, A = -A^t\}$ (los elementos de S se llaman *matrices simétricas* y los de T, *matrices antisimétricas*). Probar que S y T son subespacios de $\mathbb{K}^{n\times n}$ y $S \oplus T = \mathbb{K}^{n\times n}$.

24. Para cada S dado hallar $\mathrm{T} \subseteq \mathrm{V}$ tal que $\mathrm{S} \oplus \mathrm{T} = \mathrm{V}$ (en este caso, T se dice un *suplemento* de S con respecto a V):

   (i) $\mathrm{S} = < (1,2,-1,3)\,,\,(2,3,-2,1)\,,\,(0,1,0,7) >$, $\mathrm{V} = \mathbb{R}^4$.
   (ii) $\mathrm{S} = \{A \in \mathbb{R}^{4\times 4} \,/\, \operatorname{tr}(A) = 0\}$, $\mathrm{V} = \mathbb{R}^{4\times 4}$.
   (iii) $\mathrm{S} = < 3, 1+X^2 >, V = \mathbb{R}_4[X]$.

25. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar:

   (i) S, T subespacios de $\mathbb{R}^3$, $\dim \mathrm{S} = \dim \mathrm{T} = 2 \Rightarrow \exists v \neq 0$ tal que $v \in \mathrm{S} \cap \mathrm{T}$.
   (ii) S, T, W subespacios de $\mathbb{R}^5$, $\dim \mathrm{S} = \dim \mathrm{T} = \dim \mathrm{W} = 2 \Rightarrow \dim (\mathrm{S} \cap \mathrm{T} \cap \mathrm{W}) \geq 1$.

26. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y T un subespacio de dimensión $n-1$ (un *hiperplano*).

   (i) Probar que $\forall\, v \notin T$, $T \oplus < v > = V$.
   (ii) Si S es un subespacio de V tal que $S \not\subseteq T$, probar que $S+T=V$. Calcular $\dim S \cap T$.
   (iii) Si S y T son dos hiperplanos distintos probar que $\dim S \cap T = n-2$.

27. Sean
$S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,/\, f(x) = f(-x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,\}$ (*funciones pares*) y
$T = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,/\, f(-x) = -f(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,\}$ (*funciones impares*).
Probar que S y T son subespacios de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y $S \oplus T = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

28. Explicar por qué $det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 0$ es una ecuación implícita para $< (1,\ 2,\ 1),\ (2,\ 0,\ 1) >$.

29. Se considera el espacio vectorial $V \subset \mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$, $V =< 1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{6} >$.

a) Usando un argumento de dimensión probar que existe un polinomio $p(x) \in \mathbb{Q}[X]$ de grado ≤ 4 que se anula en el punto $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

b) Hallar p que cumpla a).

c) Calcular la dimensión de V sobre $\mathbb{Q}$.

30. (i) Sea $S = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} :\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\ \forall\ n \in \mathbb{N}\}$. Probar que S es un subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Calcular su dimensión.

(ii) Encontrar una base de S formada por sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que verifiquen $a_n = a^{n-1}$ (para algún $a \in \mathbb{R}$) $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

(iii) Usando ii), encontrar una fórmula para el término general de la sucesión de Fibonacci:

$$\begin{cases} F_1 &= 1 \\ F_2 &= 1 \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \quad \forall\ n \geq 1 \end{cases}$$