Primer cuatrimestre 2006

ALGEBRA LINEAL

PRACTICA 4.

Transformaciones lineales.

1. Determinar cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales:

   (i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 7x_3\,,\, 0\,,\, 3x_2 + 2x_3)$

   (ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2\,,\, 2x_2\,,\, 1 + x_1)$

   (iii) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$ (considerando a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.)

   (iv) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = i.z$ (considerando a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.)

   (v) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = i.Im(z)$ (considerando a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.)

   (vi) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$, $f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

   (vii) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 3}$, $f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$

   (viii) $f : \mathbb{C}^{2\times 2} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$, $f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \overline{a_{12}} \\ \overline{a_{21}} & a_{22} \end{pmatrix}$ (considerando a $\mathbb{C}^{2\times 2}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.)

   (ix) $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^3$, $f(p) = (p(0), p'(0), p''(0))$

2. Interpretar geométricamente las siguientes aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

   (i) $f(x, y) = (x, 0)$

   (ii) $f(x, y) = (0, y)$

   (iii) $f(x, y) = (x, -y)$

   (iv) $f(x, y) = (\frac{1}{2}(x + y), \frac{1}{2}(x + y))$

   (v) $f(x, y) = (x\cos t - y\operatorname{sen} t\,,\, x\operatorname{sen} t + y\cos t)$

3. Probar que las siguientes aplicaciones son transformaciones lineales:

   (i) $tr : K^{n\times n} \to K$

   (ii) $t : K^{n\times m} \to K^{m\times n}$, $t(A) = A^t$

   (iii) $f : K^{n\times m} \to K^{r\times m}$, $f(A) = BA$ donde $B \in K^{r\times n}$

(iv) $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $\delta(f) = f'$

(v) $\Phi : C([0,1]) \to C([0,1])$, $\Phi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$

(vi) $\epsilon_\alpha : K[X] \to K$, $\epsilon_\alpha(f) = f(\alpha)$ donde $\alpha \in K$

4. (i) Probar que existe una única transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1) = (-5,3)$ y $f(-1,1) = (5,2)$. Para dicha f, determinar $f(5,3)$ y $f(-1,2)$

   (ii) ¿Existirá una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1) = (2,6)$; $f(-1,1) = (2,1)$ y $f(2,7) = (5,3)$?

   (iii) Sean $f\,,g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que $f(-1,0,0) = (1,2,1)$, $f(2,1,0) = (2,1,0)$, $f(1,0,1) = (1,2,1)$, $g(1,1,1) = (1,1,0)$, $g(2,2,-1) = (3,-1,2)$ y $g(3,2,1) = (0,0,1)$. Determinar si $f = g$.

   (iv) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales exista una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga que $f(1,-1,1) = (2,a,-1)$, $f(1,-1,2) = (a^2,-1,1)$ y $f(1,-1,-2) = (5,-1,-7)$.

5. (i) Calcular el núcleo y la imagen de cada tranformación lineal de los Ejercicios 1 y 2. Decidir, en cada caso, si f es epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular f^{-1}.

   (ii) Clasificar las transformaciones lineales tr, t y ϵ_α del Ejercicio 3 en epimorfismos, monomorfismos e isomorfismos.

6. Sean $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $H(x,\ y) = (y,\ 2x)$, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,\ y,\ z) = (y,\ z + x)$, $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $G(x,\ y,\ z) = (2z,\ x - y)$. Hallar:

$$i) H \circ F \;\; y \;\; H \circ G, \qquad ii) F \circ H \;\; y \;\; G \circ H, \qquad iii) H \circ (F + G) \;\; y \;\; H \circ F + H \circ G.$$

7. Sean S, T los operadores lineales de $\mathbb{R}^2$ definidos por $S(x,\ y) = (x+y, 0)$ y $T(x,\ y) = (-y,\ x)$. Hallar:

$$S + T, \quad S^2 - 3T, \quad ST, \quad TS, \quad (-T)^2.$$

8. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2, x_1+x_3, 0, 0)$ y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $g(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$ Calcular el núcleo y la imagen de f, de g y de $g \circ f$.

   Decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

9. Sean $g : V \to V'$ y $f : V' \to V''$ transformaciones lineales. Probar:

   (i) $\mathrm{Nu}(g) \subseteq \mathrm{Nu}(f \circ g)$

   (ii) Si $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$, entonces $\mathrm{Nu}(g) = \mathrm{Nu}(f \circ g)$

   (iii) $\mathrm{Im}(f \circ g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$

   (iv) Si $\mathrm{Im}(g) = V'$, entonces $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f)$

10. (i) ¿Existirá algún epimorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$?

(ii) Sean $v_1 = (1,0,1,0)$, $v_2 = (1,1,1,0)$ y $v_3 = (1,1,1,1)$. ¿Existirá alguna transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \text{Im}(f)$?

(iii) ¿Existirá algún monomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$?

(iv) Sean S , $T \subset \mathbb{R}^4$ definidos por $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/2x_1 + x_4 = 0\,,\ x_2 - x_3 = 0\}$. ¿Existirá algún isomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(S) = T$?

(v) Determinar si existe (y en caso afirmativo hallar) una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que verifique $\text{Im}(f) = S$ y $\text{Nu}(f) = T$ en los siguientes casos:

a. $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$, $T =< (1,2,1) >$

b. $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 + x_2 = 0\ ,\ x_3 + x_4 = 0\}$, $T =< (1,-2,1) >$

11. En cada uno de los siguientes casos definir una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifique lo pedido:

(i) $(1,1,0) \in \text{Nu}(f)$ y $\dim(\text{Im}(f)) = 1$

(ii) $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) =< (1,1,2) >$

(iii) $f \neq 0$ y $\text{Nu}(f) \subseteq \text{Im}(f)$

(iv) $f \neq 0$ y $f \circ f = 0$

(v) $f \neq Id$ y $f \circ f = Id$

(vi) $\text{Nu}(f) \neq \{0\}$, $\text{Im}(f) \neq \{0\}$ y $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$

12. Sea $S =< (1,1,0,1), (2,1,0,1) > \subseteq \mathbb{R}^4$.

(i) Hallar una transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que $Nu(f) = S$.

(ii) Hallar ecuaciones para S (usar i))

(iii) Hallar un sistema de ecuaciones lineales cuyo conjunto de soluciones sea $< (1,1,0,1), (2,1,0,1)) >$

13. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ una transformación lineal tal que $\dim(\text{Im} f) = 3$. Probar que si S y T son subespacios de $\mathbb{R}^3$ tales que $f(S) \cap f(T) = 0$ entonces $S \cap T = 0$.

14. Sea V un K-espacio vectorial. $P : V \to V$ una transformación lineal se dice *proyector* si $P \circ P = P$

(i) Sea $P \in End(V)$ un proyector. Probar que $V = \text{Nu}(P) \oplus \text{Im}(P)$ y $P(v) = v \ \ \forall v \in \text{Im}(P)$

(ii) Sea $P \in End(V)$ tal que $P(v) = v \ \ \forall v \in \text{Im}(P)$. Probar que P es un proyector

(iii) Sean S y T subespacios de V tales que $V = S \oplus T$. Probar que existe un único proyector $P : V \to V$ tal que $\text{Nu}(P) = S$ e $\text{Im}(P) = T$.

(iv) Sean $P_1, P_2 \in End(V)$ transformaciones lineales que satisfacen

$$P_1 + P_2 = Id \qquad ; \qquad P_1 \text{es un proyector}$$

Probar que P_2 también es un proyector y que $V = \text{Im} P_1 \oplus \text{Im} P_2$ Calcular $P_1 \circ P_2$ *y* $P_2 \circ P_1$.

(v) Construir un proyector $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Im}P = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

15. Sea $f : V \to V$ una transformación lineal tal que $f^2 - f + Id = 0$. Probar que f es un isomorfismo.

Matrices de transformaciones lineales y cambios de coordenadas.

16. Encontrar las coordenadas de $v \in \mathrm{V}$ respecto de la base B en los siguientes casos:

    (i) $\mathrm{V} = K^n$; $v = (x_1, \dots, x_n)$ y $B = E$ la base canónica

    (ii) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$; $v = (1, 2, -1)$ y $B = \{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$

    (iii) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$; $v = (1, -1, 2)$ y $B = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, -3)\}$

    (iv) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$; $v = (x_1, x_2, x_3)$ y $B = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, -3)\}$

    (v) $\mathrm{V} = \mathbb{R}_3[X]$; $v = 2X^2 - X^3$ y $B = \{3\,,\ 1 + X\,,\ X^2 + 5\,,\ X^3 + X^2\}$

17. En cada uno de los siguientes casos, calcular $C(B, B')$, hallar las coordenadas de v respecto de B y utilizando la matriz de cambio de base, las coordenadas de v respecto de B':

    (i) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1, 1), (1, 2)\}$, $B' = \{(-1, 3), (2, 5)\}$, $v = (2, 3)$

    (ii) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$, $B' = \{(-1, 1, 1), (2, 0, 1), (1, -1, 3)\}$, $v = (-1, 5, 6)$

    (iii) $\mathrm{V} = \mathbb{R}_2[X]$, $B = \{3\,,\ 1 + X\,,\ X^2\}$, $B' = \{1\,,\ X + 3\,,\ X^2 + X\}$, $v = X$

    (iv) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^4$, $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $B' = \{v_3, v_1, v_4, v_2\}$, $v = 2v_1 + 3v_2 - 5v_3 + 7v_4$

18. (i) Sea E la base canónica de $\mathbb{R}^4$, y $F = \{(1,\ 1,\ 0,\ 0),\ (1,\ 0,\ 1,\ 0),\ (1,\ 0,\ 0,\ 1),\ (1,\ 1,\ 1,\ 1)\}$. Hallar $C(E,\ F)$.

    (ii) Sea φ la transformación lineal que manda la base E en la base F (es decir, $F = \varphi E$). Hallar las siguientes matrices:

    $$[\varphi]_E, \quad [\varphi]_F, \quad [\varphi^{-1}]_E, \quad [\varphi^{-1}]_F, \quad [\varphi]_{EF}, \quad [\varphi]_{FE}.$$

    (iii) La ecuación de una superficie S expresada en coordenadas de la base E es $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1$. Hallar la ecuación de S en la base F.

19. Dada $f : V \to V$, calcular $[f]_{BB'}$ y verificar la formula $[f(v)]_{B'} = [f]_{BB'}[v]_B$ (donde $[v]_B$ son las coordenadas del vector v en la base B) en cada uno de los siguientes casos:

    (i) $V = \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2 + x_3, 5x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 + 4x_3)$

    a. $B = B'$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

    b. $B = \{(1, 2, 1), (-1, 1, 3), (2, 1, 1)\}$ y $B' = \{(1, 1, 0), (1, 2, 3), (2, 3, 4)\}$.

(ii) $V = \mathbb{C}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - ix_2, x_1 + x_2)$

a. $B = B'$ la base canónica de $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

b. $B = B' = \{(1, 0), (0, 1), (i, 0), (0, i)\}$ considerando a $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

(iii) $V = \mathbb{R}_4[X]$, $f(P) = P'$

a. $B = B' = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$.

b. $B = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$, $B' = \{X^4, X^3, X^2, X, 1\}$.

(iv) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $f(A) = A^t$, $B = B'$ la base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(v) $V = \mathbb{C}$, $T(z) = \overline{z}$

a. $B = B' = 1, i$

b. $B = \{1, i\}$ $B' = \{1 + i, 2 - i\}$

c. $B = B' = \{1 + i, 2 - i\}$

20. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $B' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que

$$[f]_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(i) Hallar $f(3v_1 + 2v_2 - v_3)$ ¿Cuáles son sus coordenadas en la base B'?

(ii) Hallar una base de $\mathrm{Nu}(f)$ y una base de $\mathrm{Im}(f)$.

(iii) Describir el conjunto $f^{-1}(w_1 - 3w_3 - w_4)$.

21. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + 2x_3, 3x_1 - 2x_2 + x_3).$$

(i) Determinar bases B y B' de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$[f]_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Si A es la matriz de f en la base canónica, encontrar matrices inversibles C y D tales que

$$CAD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

22. Sea $\varphi : V \to W$ una t.l. entre k-ev de dimensión finita y sea $r = \dim(\mathrm{Im}\varphi)$. Describir como se pueden encontrar bases E y F de V y W respectivamente tales que $[\varphi]_{EF}$ es una matriz diagonal con r unos en la diagonal.

Encontrar dichas bases para $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $[\varphi] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

23. Los polinomios factoriales $x^{(n)}$ se definen por la formula

$$x^{(n)} = x(x-1)\dots(x-n+1).$$

Los números de Stirling del primer tipo $s_1^{(n)} \dots s_n^{(n)}$ quedan definidos por la ecuación

$$x^{(n)} = s_1^{(n)}x + s_2^{(n)}x^2 + \dots s_n^{(n)}x^n$$

Por ejemplo, $x^{(3)} = 2x - 3x^2 + x^3$, luego $s_1^{(3)} = 2$, $s_2^{(3)} = -3$, $s_3^{(3)} = 1$.

Los números de Stirling del segundo tipo $\sigma_1^{(n)} \dots \sigma_n^{(n)}$ quedan definidos por la ecuación

$$x^n = \sigma_1^{(n)}x^{(1)} + \sigma_2^{(n)}x^{(2)} + \dots \sigma_n^{(n)}x^{(n)}$$

Por ejemplo, $x^3 = x^{(1)} + 3x^{(2)} + x^{(3)}$, luego $\sigma_1^{(3)} = 1$, $\sigma_2^{(3)} = 3$, $\sigma_3^{(3)} = 1$.

Se tienen las recursiones (no se exige la demostración, pero el que tenga ganas intente hacerla):

$$s_k^{(n+1)} = s_{k-1}^{(n)} - ns_k^{(n)}, \qquad \sigma_k^{(n+1)} = \sigma_{k-1}^{(n)} + ks_k^{(n)}$$

(*) Estas recursiones permiten generar los números de Stirling de manera similar a la construcción del triángulo de Pascal con los números combinarorios.

Sea $V = \mathbb{R}_7[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 7, E la base usual, $E = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6\}$ y F la base factorial, $F = \{1, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}, x^{(5)}, x^{(6)}, x^{(7)}\}$

(i) Porque F es una base ?.

(ii) Hallar las matrices de cambio de base $C(E, F)$ y $C(F, E)$ (sugerencia: usar (*)).

(iii) Obtener $x^{(5)}$ y $x^{(6)}$.

(iv) Expresar $x^{(5)}$ y $x^{(6)}$ en la base F.

(v) Sea $D : V \to V$ el operador derivada, hallar la matriz $[D]_E$.

(vi) Sea $\Delta : V \to V$ definido por $\Delta(p(x)) = p(x+1) - p(x)$, hallar la matriz $[\Delta]_F$.