Algebra Lineal

PRACTICA 5.

Clasificación por signatura de las formas cuadráticas.

1. Sea A cada una de las siguientes matrices simétricas:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & -5 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 & 1 \\ -2 & -5 & 6 & 9 \\ -3 & 1 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

   Por medio de operaciones de filas y columnas en A, y *solo* las correspondientes de filas en I, encontrar P inversible tal que P^tAP sea diagonal. Encontrar la signatura de A.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,\, x_2) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 - 4x_2y_1 - x_2y_2$, $E = \{(1,\,1),\ (1,\,2)\}$, $F = \{(1,\,-1),\ (3,\,1)\}$. Encontrar $P = C(F,\, E)$, $A = [f]_E$, $B = [f]_F$ y verificar $B = P^tAP$.

3. Para cada una de las siguientes formas cuadráticas haga lo siguiente:

   a) Encuentre la expresión de la forma como $\pm$ suma de cuadrados en variables $(y_1,\, y_2,\, y_3,\, y_4)$. Cuál es la signatura ?.

   b) Encuentre el cambio de variables (coordenadas) P, $(y_1,\, y_2,\, y_3,\, y_4)^t = P(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4)^t$.

   c) Reemplace en la expresión a), haga las cuentas, y verifique que se recupera la forma original en las variables $(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4)$

   d) Si A es la matriz de la forma cuadrática en las variables x, y B es la matriz diagonal de la forma cuadrática en las variables y, verificar que $P^tBP = A$.

   e) Cual es la base en la que la forma cuadrática es una $\pm$ suma de cuadrados ?.

   (i) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$

   (ii) $x_1^2 + x_1x_2 + x_3x_4$

   (iii) $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + x_3^2 - 2x_4^2$

4. Encontrar la matriz diagonal (con $\pm 1's$) correspondiente, el rango y la signatura de las siguientes formas cuadráticas (no se pide encontrar el cambio de coordenadas):

   (i) $2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_1x_5 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_2x_5 + 2x_3x_4 + 2x_3x_5 + 2x_4x_5$

   (ii) $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 + 2x_5^2 + 2x_6^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_1x_4 + 4x_1x_5 + 6x_1x_6 + 2x_2x_4 + 4x_2x_5 + 2x_3x_4 + 4x_3x_6 + 4x_4x_5$

5. Hallar todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que la cuádrica

$$2\alpha x_1x_2 + 2\alpha x_2x_3 + \alpha x_3^2 - 2\alpha x_1 - 2\alpha x_2 - 2\alpha x_3 + 1 = 0$$

   sea un hiperboloide de dos hojas (signatura $= -1$).

6. Encontrar el centro (si lo hay) y clasificar las siguientes cuádricas:

   (i) $2x_1^2 + 17x_2^2 - 12x_1x_2 + 4x_1x_3 - 10x_2x_3 = 1$

   (ii) $x_1^2 + 13x_2^2 + 28x_3^2 + 4x_1x_2 + 10x_1x_3 + 26x_2x_3 = 67$

   (iii) $x_1^2 + 6x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 12x_2x_3 + 20x_2 - 6x_3 = 0$

   (iv) $x_1^2 + 9x_2^2 - 3x_3^2 - 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3 - 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 6$

   (v) $x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 4x_1 + 8x_2 + 10x_3 = -8$

7. Encuentre una matriz P de cambio de variables que lleva la forma cuadrática a una $\pm$ suma de cuadrados y clasifique las siguientes cuádricas:

   (i) $3x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3 \ = \ 0$

   (ii) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \ = \ 0$

   (iii) $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 \ = \ 0$

   (iv) $3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3 \ = \ 0$

Formas bilineales.

8. Sea V un espacio vectorial, y $B(V)$ el espacio formado por todas las formas bilineales f sobre V. Demostrar que dada cualquier base H, $H = \{h_1, h_2, \ldots h_n\}$, la matriz asociada $([f]_H)_{ij} = f(h_i, h_j)$ define un isomorfismo $g_H : V \to K^{n\times n}$, $g_H(f) = [f]_H$.

9. Demostrar que $B(V) = S(V) \bigoplus AS(V)$, donde S y AS indican los subespacios de las formas simétricas y antisimétricas respectivamente. ¿Qué pasa si $K = F_2 = \{0, 1\}$? Hallar las dimensiones de $S(V)$ y $AS(V)$.

10. ¿Cuál es la dimensión del espacio de formas cuadráticas ?

11. Verificar la forma polar $f(v, w) = 1/2(f(v+w, v+w) - f(v, v) - f(v, w))$ (donde f es una forma bilineal simétrica cualquiera).

12. Una forma bilineal simétrica es no degenerada cuando $\Phi(v, w) = 0 \,\forall\, w$ implica que $v = 0$.

    Sea Φ una forma bilineal simétrica. Probar que son equivalentes.

    (i) Φ es no degenerada.

    (ii) $\ker(\Phi) = 0$

    (iii) Existe una base B de V tal que $G_B(\Phi)$ es inversible.

13. Analizar si las siguientes formas bilineales son degeneradas. En caso de serlo hallar una base del núcleo. Calcular el rango, el índice y la signatura.

    (i) $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2$

    (ii) $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1$

14. Sea f la forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$, $f = f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$.

(i) ¿Cuál es la forma bilineal simétrica asociada a f?
Demostrar;

(ii) f es no degenerada $\iff$ $b^2 - 4ac \neq 0$.

(iii) f es definida positiva $\iff$ $a > 0$ y $b^2 - 4ac < 0$.

15. Demostrar que toda forma bilineal $\varphi(u, w)$ de rango uno puede escribirse como:

$$\varphi(u, w) = \varphi(u, a).\varphi(b, w)\text{para algúna} \in V, b \in V.$$

16. Demostrar que:

(i) Si A es definida positiva, el elemento máximo (en módulo) de A se encuentra en la diagonal.

(ii) Si A es definida positiva, el mínimo de la función $\langle Ax, x\rangle - 2\langle b, x\rangle$ se encuentra en la solución del sitema $Ax = b$ (b constante fijo de antemano).