Primer Cuatrimestre 2006

Algebra Lineal

Práctica 6

1. Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz A en cada uno de los siguientes casos:

   (Analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$)

   i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ iii) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$

   iv) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ v) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ viii) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$

2. Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar dos matrices distintas P tales que $P^{-1}AP =$Diagonal.

   ¿Debe ser siempre la diagonal la misma?

3. Sea $A \in K^{n \times n}$.

   (i) Probar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

   (ii) Probar que si A es inversible, entonces 0 no es autovalor de A; y si x es un autovector de A, entonces x es un autovector de A^{-1}.

4. Para cada una de las matrices A del ejercicio 1, sea U una base de K^n y sea $f : K^n \to K^n$ la tranformación lineal tal que $|f|_U = A$. Decidir si es posible encontrar una base B de K^n tal que $|f|_B$ sea diagonal. En caso afirmativo, calcular C_{BU}.

5. (i) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ con autovalores $1/2, 1/3$ y $1/5$. Probar que $A^n \to 0$ (i.e. $a_{ij}^n \to 0 \ \ \forall i\ j$).

   (ii) Buscar un enunciado general del cual este caso sea un ejemplo.

   Nota: Para i) usar que $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$.

6. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por:

$$f(x, y, z) = (-x - 2y + 6z, 4y, -x - 3y + 4z)$$

   (i) Encontrar una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $|f|_B$ sea diagonal.

   (ii) Calcular $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(iii) Hallar, si es posible, una matriz $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

7. Dar ejemplos de matrices (2×2) que tengan los mismos autovalores y que no sean semejantes.

8. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ / $A^2 + I = 0$. Demostrar:

   (i) A es no singular.

   (ii) n es par.

   (iii) A no tiene autovalores reales.

   (iv) Hallar un ejemplo para $n = 2$ y otro para $n = 4$.

9. Sea V espacio vectorial de dim n, $\varphi : V \to V$ transformación lineal con n autovalores distintos. Demostrar que si ψ conmuta con φ $(\psi\varphi = \varphi\psi)$ entonces existe una base B en la cual ambas transformaciones son diagonales. Expresar este resultado en términos de matrices.

10. Sea $A \in K^{2\times 2}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. Demostrar:

    (i) Si $a \neq c$ entonces A es diagonalizable sobre K.

    (ii) Si $a = c$ encontrar todos los b tales que A sea diagonalizable sobre K.

11. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

    (i) Probar que $A^n = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_{n+1} \end{pmatrix}$ donde los a_i son la sucesión de Fibonacci.
    Es decir, $(*)$ $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

    (ii) Sean $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $B = \begin{pmatrix} -\lambda_2/5 & 1/5 \\ -\sqrt{5}\lambda_1 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$. Entonces $\det(B) = 1$ y $B^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -1/5 \\ \sqrt{5}\lambda_1 & \lambda_2/5 \end{pmatrix}$. Además $A = B^{-1}DB$ donde $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

    (iii) Deducir $A^n = B^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} B$. Ello da una solución para la ecuación $(*), a_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\sqrt{5}}$. Deducir que los números de Fibonacci satisfacen la formula asintótica $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$. (Se puede saber como crecen cuando $n \to \infty$)

12. Sea $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infinitamente derivables$\}$. Considerar el operador derivada $\frac{d}{dx} : V \to V$. Mostrar que todo número real es un autovalor y exhibir un autovector correspondiente. ¿Por qué se pide infinitamente derivables y no simplemente derivables?