Primer Cuatrimestre 2006

Algebra Lineal

Práctica 7

Espacios euclídeos

1. Determinar si las siguientes funciones son o no productos internos. En caso afirmativo encontrar su matriz en la base canónica.

   (i) $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + 3.x_2.y_1 - x_2.y_2 + 3.x_1.y_2$

   (ii) $\Phi(x, y) = x_1.y_1 + x_2.y_1 + 2.x_2.y_2 - 3.x_1.y_2$

   (iii) $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + x_2.y_2 - x_1.y_2 - x_2.y_1$

   (iv) $\Phi(x, y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$

   (v) $\Phi(x, y) = |x_1||y_1| + |x_2||y_2|$

2. Sea V un espacio vectorial euclídeo. Verificar la siguiente fórmula polar:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}||x + y||^2 - \frac{1}{4}||x - y||^2 \qquad \forall\, x, y \in V$$

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. El criterio de Sylvester para $n = 2$ resulta ser el siguiente enunciado:

   Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x, y) = y.A.x^t$. Φ es un producto interno si y sólo si $A = A^t$, $a_{11} > 0$ y $\det(A) > 0$.

   Demostrarlo sin usar el criterio de Sylvester, es decir, demostrar el criterio en el caso particular $n = 2$. ¿Le encuentra alguna relación con el ejercicio 14 de la práctica 5?

4. Determinar para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$ es

$$\Phi(x, y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + bx_2y_2 + (1 + b)x_3y_3$$

   un producto interno en $\mathbb{R}^3$.

5. Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ el producto interno definido por

$$\Phi(x, y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 6x_2y_2$$

   Encontrar una base de $\mathbb{R}^2$ que sea ortonormal para Φ.

6. En cada uno de los siguientes casos, hallar un producto interno en V para el cual la base B resulte ortonormal.

   (i) $V = \mathbb{R}^2$ y $B = \{(1, 1), (2, -1)\}$

   (ii) $V = \mathbb{R}^3$ y $B = \{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$

7. Probar que las siguientes funciones definen productos internos sobre los espacios vectoriales considerados:

(i) $\langle , \rangle : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $\langle A, B\rangle = tr(AB^t)$.

(ii) $\langle , \rangle : C([0,1],\mathbb{R}) \times C([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$

(iii) $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\langle x, y\rangle = y^t\, Q^t Q\, x^t$
donde $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz inversible.

8. Restringir el producto interno del item ii) del ejercicio anterior a $\mathbb{R}_n[X]$ y calcular su matriz en la base $B = \{1, X, \ldots, X^n\}$.

9. Sea V un espacio euclídeo y L y M dos subespacios de V. Demostrar:

   (i) $\dim L + \dim L^\perp = \dim V$

   (ii) $(L^\perp)^\perp = L$

   (iii) $(L + M)^\perp = L^\perp \cap M^\perp$

   (iv) $(L \cap M)^\perp = L^\perp + M^\perp$

10. Hallar el complemento ortogonal de los siguientes subespacios de V:

   (i) $V = \mathbb{R}^3$, $\quad S =< (1, 2, 1) >$

      a. Para el producto interno canónico.

      b. Para el producto interno definido por

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1.$$

   (ii) $V = \mathbb{R}^4$, $\quad S =< (1, 1, 0, -1), (-1, 1, 1, 0), (2, -1, 1, 1) >$ para el producto interno canónico.

11. (i) Hallar bases ortonormales para los subespacios del ejercicio anterior para cada uno de los productos internos considerados.

   (ii) Hallar el punto de S más cercano a $(0, 1, 1, 0)$. Calcular la distancia de $(0, 1, 1, 0)$ a S.

12. Considerar $\mathbb{R}^4$ con el producto interno canónico. Encontrar la distancia de $v = (1,\ 3,\ -2,\ 0)$ al subespacio $S =< (0,\ -3,\ -1,\ 5), (4,\ -1,\ -3,\ 3) >$

13. Sea $V = \mathbb{R}_n[X]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$. Encontrar la distancia de $-x^n$ al subespacio de polinomios de grado $\leq n - 1$.

14. Se considera $\mathbb{R}^{3\times 3}$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = tr(AB^t)$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.

15. Se considera $\mathbb{R}_3[X]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, X, X^2, X^3\}$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S =< 1 >$.

16. Se considera $C([-1, 1], \mathbb{R})$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$. Hallar el polinomio de grado menor o igual que 3 más próximo a la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$.

    Sugerencia: Observar que basta considerar el subespacio $S =< 1, x, x^2, x^3, \operatorname{sen}(\pi x) >$.

17. Se considera $C([0, \pi], \mathbb{R})$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)dt$.

(i) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $B = \{1, \cos t, \operatorname{sen} t\}$.

(ii) Sea S el subespacio de $C([0,\pi],\mathbb{R})$ generado por B. Hallar el elemento de S más próximo a la función $f(x) = x$.

18. Sea $V = \mathbb{R}_2[X]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$. Encontrar los ángulos del triángulo ABC, donde $B = x^2$, $C = 1 - x^2$ y $A = 1$.

19. Sea $V = \mathbb{R}_2[x]$ con la estructura euclídea definida como en el ejercicio anterior. Encontrar una base ortonormal del subespacio $S = < 1, x, x^2 >$.

20. Se considera $C([0,\,1],\mathbb{R})$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$. Sea $f = x^2 + 1$, $g = \alpha x^2 + 1$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que g sea ortogonal a f. Encontrar α y verificar el teorema de Pitágoras $||f + g||^2 = ||f||^2 + ||g||^2$.

Operadores autoadjuntos y operadores ortogonales

21. i) Sea en $\mathbb{R}^3$ el producto interno $\langle\, ,\, \rangle$ definido en la base canónica por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y sea φ la forma lineal definida por $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 3.x_1 - 2.x_2 - 3.x_3$. Hallar $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x) = \langle x, v\rangle$.

ii) Se considera en $\mathbb{R}_3[X]$ el producto interno definido por $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x).q(x)\ dx$. Sea φ la forma lineal definida por $\varphi(p) = p(5)$. Hallar $g \in \mathbb{R}_3[X]$ tal que $\varphi(p) = \langle p, g\rangle$.

22. Calcular f^* para cada una de las transformaciones lineales siguientes:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$

(ii) $B = \{(1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$, $\quad f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(iii) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $\quad f(p) = p'$ $\quad$ (donde $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$).

(iv) $\mu_f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $\mu_f(p) = fp$ donde $f \in \mathbb{R}[X]$ y $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$

23. Sea $(V, \langle,\rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimension finita y sea $f : V \to V$ una tranformacion lineal. Probar que $\mathrm{Im}(f^*) = (\mathrm{Nu}\ (f))^\perp$.

24. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-x - 3y - 2z, 4x + 6y + 2z, -3x - 3y).$$

Hallar un producto interno $\langle\, ,\rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que f sea autoadjunta para $\langle\, ,\rangle$.

25. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$.

ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, simetría respecto de la recta de ecuación $x_1 - x_2 = 0$.

iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, simetría respecto del plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

iv) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ y eje $< (1, 0, 1) >$.

26. Dada la tranformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

decidir si f es una rotación, una simetría o una composición de una rotación y una simetría. Encontrar la rotación, la simetría o ambas.

27. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $|f| = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$.

i) Probar que f es una rotación.

ii) Hallar $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ g = f$.

28. Para cada una de las siguientes matrices, verificar que existe una matriz $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal tal que OAO^t sea diagonal y encontrar una:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

29. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ simétrica con autovalores 3 y 4 y $(3, 4)$ el autovector asociado a 3. Hallar un autovector asociado a 4. Hallar A y $\sqrt{A}$.

30. Demostrar que una matriz simétrica real tiene una raíz cúbica simétrica; es decir, si A es simétrica real, existe una simétrica real B tal que $B^3 = A$.

31. Hallar en cada caso una matriz simétrica que verifique:

(i) $1, 2, -1$ son sus autovalores y tenga algun autovector en $S = \{(x, y, z) : x - y + z = 0\}$.

(ii) $-1, -1, 3, 0$ son sus autovalores y que algunos de sus autovectores pertenezcan a $S = \{(x, y, z, w) : 2x - y + z + w = 0; x - y - w = 0\}$

32. Consideremos R^3 con el producto interno canónico. Sea

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

Determinar si existe un transformación autoadjunta $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con un autovalor doble $\lambda = 2$ y tal que:

$$f(S) = S \quad y \quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) - \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -2\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

En caso de que exista hallar una tal f ¿Es única? Encontrar una base ortonormal de autovectores para f ¿Es única?

33. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz ortogonal. Sea A' la submatriz que se obtiene de quitar la primer fila y la primer columna. Demostrar que $det(A') = a_{11}$ ó $-a_{11}$.

Clasificación de cuádricas

34. Hallar todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que la cuádrica

$$2\alpha x_1x_2 + 2\alpha x_2x_3 + \alpha x_3^2 - 2\alpha x_1 - 2\alpha x_2 - 2\alpha x_3 + 1 = 0$$

sea un hiperboloide de dos hojas (signatura $= -1$).

35. Encontrar el centro (si lo hay) y clasificar las siguientes cuádricas:

(i) $2x_1^2 + 17x_2^2 - 12x_1x_2 + 4x_1x_3 - 10x_2x_3 = 1$
(ii) $x_1^2 + 13x_2^2 + 28x_3^2 + 4x_1x_2 + 10x_1x_3 + 26x_2x_3 = 67$
(iii) $x_1^2 + 6x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 12x_2x_3 + 20x_2 - 6x_3 = 0$
(iv) $x_1^2 + 9x_2^2 - 3x_3^2 - 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3 - 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 6$
(v) $x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 4x_1 + 8x_2 + 10x_3 = -8$

36. Encuentre una matriz P de cambio de variables que lleva la forma cuadrática a una $\pm$ suma de cuadrados y clasifique las siguientes cuádricas por signatura:

(i) $3x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0$
(ii) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0$
(iii) $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 = 0$
(iv) $3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3 = 0$

37. Encuentre una matriz ortogonal P de cambio de variables que lleva la forma cuadrática a una forma diagonal y clasifique las mismas cuádricas del ejercicio anterior y comparar.