Álgebra Lineal - Práctica 8

1. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y sean $\lambda_1, ..., \lambda_n$ las raíces del polinomio característico de A contadas con multiplicidad.

   (a) Probar que $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

   (b) Probar que $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

2. Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

   (a) Calcular $A^4 - 4A^3 - A^2 + 2A - 5I_2$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   (b) Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (c) Calcular $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

   (d) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar a A^{-1} como combinación lineal de A y de I_2.

3. Dada $A \in K^{n\times n}$ y $\varphi \in K[t]$ / $\varphi(A) = 0$, puede utilizarse φ para encontrar distintas potencias de A. Por ejemplo,
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ \varphi(t) = t^3 - 3t^2 - 7t - 11$$
   Entonces, $A^{-1} = \frac{1}{11}(A^2 - 3A - 7I)$, $A^3 = 3A^2 + 7A + 11I$. Verificarlo. Calcular A^{-2}.
   Nota: $\varphi(A) = 0$ porque φ es el polinomio característico de A.

4. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular como en el ejercicio 3: A^2 , A^3 , A^{-1} , A^{-2} , A^{-3}.

5. Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Probar que f es un isomorfismos si y solo si el término constante de χ_f es no nulo. En dicho caso, hallar la expresión general de f^{-1} como polinomio en f.

6. Hallar el polinomio minimal de las siguientes matrices (comparar con el característico):
$$\text{i)} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \ , \ \text{ii)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ , \ \text{iii)} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \ , \ \text{iv)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\text{v)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ , \ \text{vi)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \text{ix)} \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ , \ \text{x)} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

7. Sea $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Demostrar: $m_A =$ mínimo común múltiplo$\{m_B; m_C\}$.

8. Probar que: A es inversible $\Leftrightarrow m_A(0) \neq 0 \Leftrightarrow \chi_A(0) \neq 0$.

9. Calcular el polinomio minimal para cada una de las siguientes transformaciones lineales:

   (a) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) = P' + 2.P$.

   (b) $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $f(A) = A^t$.

10. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$. Calcular su polinomio minimal y su polinomio característico.

11. Encontrar una matriz cuyo polinomio minimal sea:
   i) $t^3 - 5t^2 + 6t + 8$, ii) $t^4 - 5t^3 - 2t^2 + 7t + 4$.

12. Diagonalizar las matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ encontrando sus autovectores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Sugerencia: no intentar calcular el polinomio característico.

13. Se sabe que la matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tiene a $(1, -1)$ como autovector de autovalor $\sqrt{2}$, y además $\chi_A \in \mathbb{Q}[x]$. Decidir si A es diagonalizable en $\mathbb{R}^{2\times 2}$. ¿Es única?

14. (a) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalizable con $\mathrm{tr}(A) = -4$. Calcular los autovalores de A sabiendo que los autovalores de $A^2 + 2A$ son $-1, 3$ y 8.

   (b) Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que $\det(A) = 6$; 1 y -2 son autovalores de A y -4 es autovalor de $A - 3Id$. Hallar los restantes autovalores de A.

15. Sea $f : \mathbb{K}^{\to}\mathbb{K}^n$ un proyector con $\dim(\mathrm{Im}(f)) = s$. Calcular χ_f. ¿Es f diagonalizable?

16. Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal tal que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$. Probar que f es diagonalizable si y solo si $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

17. Sean A y B dos matrices en $\mathbb{K}^{n\times n}$. Probar que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

18. Sea $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ la transformación lineal definida por:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2, x_3, x_4, x_5, 0)$$

   (a) Hallar, para cada $0 \leq i \leq 5$, un subespacio S_i de $\mathbb{R}^5$ con $\dim(S_i) = i$ que sea f-invariante.

   (b) Probar que no existen subespacios propios f-invariantes S y T de $\mathbb{R}^5$ tales que $\mathbb{R}^5 = S \oplus T$.

19. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, y sea $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $f_A(x) = Ax$. Hallar subespacios propios S y T de $\mathbb{R}^3$, f_A-invariantes, tales que $S \oplus T = \mathbb{R}^3$.

20. Demostrar directamente de las definiciones:

    (a) A nilpotente $\Longrightarrow$ todos los autovalores son 0.

    (b) Supongamos que $K = \mathbb{C}$ y 0 es el único autovalor de A. Probar que A es nilpotente. (*Pista:* Supongamos A matriz de $n \times n$. $\dim(\mathrm{Im}A) < n$. Si no es nula, tomar la imagen de la imagen y así seguir hasta cero.)

    (c) Estudiar b) en el caso $K = \mathbb{R}$.

21. Mostrar que: A , B nilpotentes y $AB = BA \Longrightarrow AB$ es nilpotente. Encontrar un contraejemplo en el caso que las matrices A y B no conmuten.

22. Demostrar que las matrices nilpotentes siguientes son semejantes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

23. Dar una base de $K_{<n}[t]$ donde el operador derivada tenga la matriz A y otra en la que tenga la matriz B. (A y B del ejercicio anterior).

24. Sea $f : K^n \to K^n$ la transformación lineal dada por: $[f]_E = A$, donde A es la matriz del ejercicio 22. ¿Por qué K^n no puede descomponerse como suma directa de subespacios invariantes de A?

25. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Encontrar todos los subespacios invariantes de A considerando:

    (a) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

    (b) $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$.

26. Sean A y B matrices de orden n que conmutan ($AB = BA$). Probar que si S es un subespacio invariante para A entonces $B^{-1}(S)$ y $B(S)$ también lo son. En particular $\mathrm{Nu}(B)$ e $\mathrm{Im}(B)$ son invariantes para A.

27. Sea A una matriz de orden n, $f \in K[t]$, λ un autovalor de A y V_λ el autoespacio asociado a λ. Probar que:

    (a) $\mathrm{Nu}(f(A))$ y $\mathrm{Im}(f(A))$ son subespacios invariantes de A.

    (b) $f(\lambda)$ es autovalor de $f(A)$ y el autoespcio asociado a él incluye a V_λ. En particular:
        - λ raíz de $f \Longrightarrow V_\lambda \subset \mathrm{Nu}(f(A))$
        - λ no es raíz de $f \Longrightarrow V_\lambda \subset \mathrm{Im}(f(A))$

28. Sea $f(t) = t^2 + 1 \in \mathbb{R}[t]$.

    (a) Demostrar que ninguna $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ anula a $f(t)$. (*)

    (b) Encontrar $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tal que $A^2 + 1 = 0$.

    (c) ¿Qué pasa con las matrices de 2×2?

    (*) Si no sale, espere hasta el final de la práctica y mire la pista para hacer este ejercicio. Pero intente hacerlo ahora, por lo menos parte b) y c).

Base y forma de Jordan de operadores nilpotentes

Sea V, $\dim(V) = n$, $A : V \to V$ / $A^k = 0$, $A^{k-1} \neq 0$ (k: índice de nilpotencia de A).

29. Sea $v \in V$ tal que "tarda k-veces en llegar a cero", es decir $A^k(v) = 0$ y $A^{k-1}(v) \neq 0$ $(v \in \mathrm{Nu}(A^k)\ ,\ v \notin \mathrm{Nu}(A^{k-1}))$.

    Demostrar que: $L = \langle v, A(v), A^2(v), \ldots, A^{k-1}(v)\rangle$ es invariante para A y de dimensión k. Deducir que $k \leq n$.

30. Observar que se tiene la siguiente cadena *estrictamente* creciente de subespacios

$$0 \subset \mathrm{Nu}(A) \subset \mathrm{Nu}(A^2) \subset \ldots \subset \mathrm{Nu}(A^k) = V$$

    y demostrar que $A(\mathrm{Nu}(A^{i+1}) \subset \mathrm{Nu}(A^i)$.

    Argumentar que siempre pueden tomarse $S_j \subset \mathrm{Nu}(A^j)$ de tal forma que $B_i = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_i$ forme una base de $\mathrm{Nu}(A^i) \quad 1 \leq i \leq k$.

    En particular: $V = \langle S_1\rangle \oplus \ldots \oplus \langle S_k\rangle$

    S_i genera vectores que "tardan *exactamente* i-veces en llegar a 0" (vectores de índice i).

    El hecho siguiente es fundamental:

31. Demostrar que $B_i \cup A(S_{i+2}) \subset \mathrm{Nu}(A^{i+1})$ es linealmente independiente.
    En particular: $A(S_{i+2}) \cap \mathrm{Nu}(A^i) = \phi$.

    Podemos decir entonces que A *baja el índice de los vectores de a uno.*

    Tomando en cuenta esto redefinamos los conjuntos S_i de la siguiente forma:
    Sea $S'_k = S_k$ y $F_k = S_k$
    Sea F_{k-1} subconjunto de vectores que extiende $A(S_k)$ a una base de de $\langle S_{k-1}\rangle$.
    Definimos $S'_{k-1} = A(S_k) \cup F_{k-1}$ como esta nueva base.

    Continuando de esta forma obtendremos:

$$(*)\begin{cases} S'_k &= F_k & \text{vectores de índice k}\\ S'_{k-1} &= A(F_k) \cup F_{k-1} & \text{vectores de índice k-1}\\ S'_{k-2} &= A^2(F_k) \cup A(F_{k-1}) \cup F_{k-2} & \text{vectores de índice k-2}\\ \vdots & & \\ S'_1 &= A^{k-1}(F_k) \cup A^{k-2}(F_{k-1}) \cup \ldots \cup A(F_2) \cup F_1 & \text{vectores de índice 1=Nu}(A)\end{cases}$$

    Nota: S'_j es una base de $\langle S_j\rangle$

    Demostrar que $B = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} S'_i$ es una base de V.

    Observemos $\forall\ v \in F_i\ ,\ \{v, A(v), \ldots, A^{i-1}(v)\}$ genera un subespacio de V invariante por A. Reordenando la base B adecuadamente se tendrá que $[A]_B$ es una matriz en bloques, uno para cada vector de $F_1 \cup \ldots \cup F_k$. Cada uno de estos bloques se llama *bloque de Jordan*. Habrá tantos bloques de Jordan de dimensión i como vectores haya en F_i.

    Observar que si bien $F_k \neq \phi$ todos los otros pueden ser vacíos.

    La cantidad de bloques queda determinada por la cantidad de vectores en S'_1, i.e. por la dimensión del núcleo de A.

    La base B se llama *base de Jordan* de A y lo anterior da un método para encontrarla.

32. En el ejercicio anterior se observa que la cantidad de bloques de cada índice (tamaño) queda unívocamente determinada por A. Luego ordenando los bloques de mayor a menor la *forma de Jordan* de la matriz de A es **única**. Deducir que dos matrices (nilpotentes) son semejantes si y sólo si tienen la misma forma de Jordan.

33. Encontrar la forma y base de Jordan del operador dado por la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Decir cuantos bloques de Jordan tiene y cuál es la dimensión de cada uno.
(*Sugerencia:* Seguir el procedimiento descripto en los ejercicios anteriores.)

34. Hacer lo mismo para: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 8 & 30 & -14 \\ -6 & -19 & 9 \\ -6 & -23 & 11 \end{pmatrix}$.

Base y forma de Jordan en general.

Consideraremos ahora el caso en que $A \in K^{n \times n}$ tiene los n autovalores (repetidos o no) en K. (Esto se da siempre si $K = \mathbb{C}$).

Supongamos primero que A tiene un único autovalor λ. Sea $C = A - \lambda I$, $\mathrm{Nu}(C) = V_\lambda =$ espacio de autovectores. El operador C tiene a 0 como único autovalor (probarlo), luego es nilpotente (ej. 1). La base de Jordan B de C, es por definición la de A, y la forma de Jordan de A (i.e $[A]_B$) es la misma que la de C pero con λ en la diagonal en lugar de 0. ($A = C + \lambda I$)

Reducción al caso de un único autovalor:

Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ ($s \leq n$) los distintos autovalores de A. Sea $C_i = A - \lambda_i I$, $\mathrm{Nu}(C_i) = V_{\lambda_i} =$ espacio de autovectores asociados a λ_i. Se tiene la siguiente cadena creciente de subespacios de V:

$$0 \subset \mathrm{Nu}(C_i) \subset \mathrm{Nu}(C_i^2) \subset \ldots$$

Como V es de dimensión finita, la cadena se estabiliza. Sea k_i la primera potencia que se repite: $\mathrm{Nu}(C_i^{k_i-1}) \subset \mathrm{Nu}(C_i^{k_i}) = \mathrm{Nu}(C_i^{k_i+1})$. Definimos $R_{\lambda_i} = \mathrm{Nu}(C^{k_i})$. Los vectores de R_{λ_i} se llaman vectores principales asociados a λ_i. Notar que $V_{\lambda_i} \subset R_{\lambda_i}$.

Es claro que C_i restringido a R_{λ_i} es nilpotente de índice k_i. Si $h_i = \dim R_{\lambda_i}$ (por lo cual $k_i \leq h_i$), vale lo siguiente:

1. R_{λ_i}es invariante.
2. $R_{\lambda_i} \cap R_{\lambda_j}$ para $i \neq j$.
3. $h_i =$ dimensión algebraica de λ_i. Luego $n = h_1 + h_2 + \ldots + h_s$.

Se sigue que $V = R_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus R_{\lambda_s}$, descomposición de V en subespacios invariantes. R_{λ_i} define el bloque de la forma de Jordan correspondiente a λ_i. Para calcular ese bloque, se encuentra una base de R_{λ_i} de la siguiente forma: primero de toma una base de $\mathrm{Nu}(C_i)$, luego agrego lo que falta para generar $\mathrm{Nu}(C_i^2)$, y así hasta que se estabiliza. Esta base de R_{λ_i} está dispuesta como en el ejercicio 30, para el operador C_i, que restringido a R_{λ_i} es nilpotente. Luego se procede como en el ejercicio 31 y se obtiene la parte de la base y el bloque de Jordan de A correspondiente al autovalor λ_i. Se repite esto para cada λ_i y listo.

35. Hallar la base de Jordan del operador dado por las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notar que encontrar las bases de Jordan es equivalente a encontrar la matriz P tal que $P^{-1}AP = J$, con J en forma de Jordan.

36. Sea A en la situación dada en el comentario anterior al ejercicio 19. Sea $\chi_A = (t-\lambda_1)^{h_1} \dots (t-\lambda_s)^{h_s}$ el polinomio característico de A y $m_A = (t-\lambda_1)^{k_1} \dots (t-\lambda_s)^{k_s}$ con $k_i \leq h_i$ el polinomio minimal de A. El exponente k_i de $(t-\lambda_i)$ en m_A es el índice de nilpotencia de $C_i = A - \lambda_i I$ como operador de R_{λ_i}. Se entiende entonces que k_i es el tamaño del mayor bloque correspondiente a λ_i, y por defininición h_i es el número de veces que aparece λ_i en la forma de Jordan. Con esta información, encontrar *todas las formas de Jordan posibles* de matrices cuyos polinomios χ_A y m_A son los siguientes:

$$\begin{array}{rll} (i) & \chi_A(t) = (t-2)^4(t-3)^2 & m_A(t) = (t-2)^2(t-3)^2 \\ (ii) & \chi_A(t) = (t-7)^5 & m_A(t) = (t-7)^2 \\ (iii) & \chi_A(t) = (t-2)^7 & m_A(t) = (t-2)^3 \\ (iv) & \chi_A(t) = (t-3)^4(t-5)^4 & m_A(t) = (t-3)^2(t-5)^2 \end{array}$$

37. Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Hallar su forma de Jordan.

38. Sea $V = \langle sen(x), cos(x) \rangle \subset \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ funciones}\}$. La dimensión de V es 2. Sea $D : V \to V$ el operador diferencial.

    (a) Encontrar χ_D y m_D.

    (b) Mostrar que $f(D) = D^2 + 1 = 0$.

39. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Encontrar la forma y base de Jordan de A.

40. Sea A la rotación de $\frac{\pi}{2}$ en $\mathbb{R}^2$. Diagonalizar en $\mathbb{C}$.

41. Sea T un proyector (ie $T^2 = T$). Encontrar la forma de Jordan de T. Observar que existe cualquiera sea el cuerpo K. ?¿Por qué?

Sugerencia para el ejercicio 28: Argumentar que $t^2 + 1$ debería ser el mimimal de A y por lo tanto no tiene raíces reales. Pero χ_A tiene por lo menos una raíz real, contradiciendo el hecho que raíces χ_A = raíces de m_A.