SUMAS DE SUBESPACIOS

En este apunte trabajaremos el concepto de sumas de subespacios. La suma de subespacios es el subespacio generado por la unión de todos los sumandos.

Definición 1. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vecorial y sean S y T subespacios. Definimos la suma de S y T como el subespacio $S + T = \langle S, T\rangle$. En el caso en que $S \cap T = \{0\}$ decimos que la suma es directa y notamos $S + T = S \oplus T$.*

Observación 2. Resulta claro que $S+T = \{s+t \in \mathbb{V} \,/\, s \in S,\, t \in T\}$ ya que el miembro de la derecha es un subespacio y cualquier subespacio que contenga a S y a T contiene a todos los vectores de la forma $s + t$ ($s \in S$, $t \in T$). Esto demuestra el hecho de que la unión de un conjunto de generadores de S con un conjunto de generadores de T es un conjunto de generadores de la suma.

Definición 3. *Sean $B = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ y $B' = \{w_1, w_2, \dots w_m\}$ conjuntos ordenados. Llamamos unión ordenada de B y B' a la sucesión $\{v_1, v_2, \dots v_n, w_1, w_2, \dots w_m\}$. Esta definición puede extenderse a varios subespacios inductivamente.*

Observación 4. Notar que en una unión ordenada puede aparecer el mismo elemento más de una vez.

Proposición 5. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión finita y sean S y T subespacios. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. $S + T = S \oplus T$.
2. $dim(S + T) = dim(S) + dim(T)$.
3. *La unión ordenada de una base de S y una base de T es base de $S + T$.*
4. *Para todo $v \in S + T$ existen únicos $s \in S$ y $t \in T$ tales que $v = s + t$.*

Demostración. (1)$\Rightarrow$(2): Por el teorema de la dimensión tenemos que $dim(S+T) = dim(S)+dim(T)-dim(S\cap T)$. Luego, como $S\cap T = \{0\}$ se tiene (2).

(2)$\Rightarrow$(3): Sean B_S y B_T bases de S y T respectivamente. Por la observación anterior sabemos que $B = B_S \cup B_T$ es un conjunto de generadores de $S+T$ y por lo tanto $dim(S+T) \leq \#(B)$. Por otro lado $\#(B) \leq \#(B_S) + \#(B_T) = dim(S) + dim(T) = dim(S + T)$. Luego $dim(S + T) = \#(B)$ y, como B genera $S + T$, resulta base.

(3)$\Rightarrow$(4): Supongamos que $s + t = s' + t'$ tenemos entonces que $s-s' = t'-t$. Si $s-s' = t'-t \neq 0$ entonces es linealmente independiente, por lo que puede extenderse tanto una base de S como a una de T. Conseguimos así una base de S y otra de T cuya unión ordenada no es base de $S+T$ (está el mismo elemento dos veces), que resulta una contradicción. Luego $s = s'$ y $t = t'$.

(4)⇒(1): Sea $v \in S \cap T$, tenemos que $0_{\in S} + v_{\in T} = v_{\in S} + 0_{\in T}$, como la escritura es única, sigue que $v = 0$. □

Observación 6. En caso de que $\mathbb{V}$ sea de dimensión infinita (1), (3) y (4) siguen siendo equivalentes e implican (2).

Definiremos ahora suma y suma directa de varios subespacios.

Definición 7. *Sean* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$ *espacio vectorial y* $\{S_i \,/\, i \in I\}$ *una familia de subespacios de* $\mathbb{V}$*. Definimos el subespacio suma como*

$$\sum_{i \in I} S_i = \langle S_i \,/\, i \in I \rangle = \{\sum_{j=1}^{n} v_{i_j} \,/\, v_{i_j} \in S_{i_j},\, n \in \mathbb{N}\}$$

Proposición 8. *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$ *espacio vectorial de dimensión finita y sean* S*,* S_2*, ...* S_n *subespacios. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. $S_i \cap \sum_{j \neq i} S_j = \{0\}$ *para todo* i *(*$1 \leq i \leq n$*).*
2. $dim(\sum_{i=1}^{n} S_i) = \sum_{i=1}^{n} dim(S_i)$*.*
3. *Si para cada* i*, (*$1 \leq i \leq n$*),* B_i *es base de* S_i*, la unión ordenada de los* B_i*, (*$1 \leq i \leq n$*), es base de* $\sum_{i=1}^{n} S_i$*.*
4. *Para todo* $v \in \sum_{i=1}^{n} S_i$ *existen únicos* $v_i \in S_i$*, (*$1 \leq i \leq n$*), tales que* $v = \sum_{i=1}^{n} v_i$*.*

Demostración. (1)⇒(2): (Por inducción en el número de sumandos).

En la proposición anterior probamos que (1)⇒(2) para $n = 2$.

Supongamos ahora que vale para $n-1$ sumandos. Consideremos S_1, S_2, ..., S_{n-1}, de (1) se deduce que $S_i \cap \sum_{j \neq i} S_j = \{0\}$ para todos i, j, con $1 \leq i, j \leq n-1$ entonces, por hipotesis inductiva resulta que $dim(\sum_{i=1}^{n-1} S_i) = \sum_{i=1}^{n-1} dim(S_i)$. Por el teorema de la dimensión sabemos que

$$dim(\sum_{i=1}^{n} S_i) = dim(\sum_{i=1}^{n-1} S_i + S_n) = dim(\sum_{i=1}^{n-1} S_i) + dim(S_n) - dim(S_n \cap \sum_{i=1}^{n-1} S_i)$$

Luego, como $S_n \cap \sum_{i=1}^{n-1} S_i = \{0\}$ se tiene (2).

(2)⇒(3): Sean B_{S_i} bases de S_i. Es claro que $B = \cup_{i=i}^{n} B_{S_i}$ es un conjunto de generadores de $\sum_{i=1}^{n} S_i$ y por lo tanto $dim(\sum_{i=1}^{n} S_i) \leq \#(B)$. Por otro lado $\#(B) \leq \sum_{i=1}^{n} \#(B_{S_i}) = \sum_{i=1}^{n} dim(S_i) = dim(\sum_{i=1}^{n} S_i)$. Luego $dim(\sum_{i=1}^{n} S_i) = \#(B)$ y, como B genera $\sum_{i=1}^{n} S_i$, resulta base.

(3)⇒(4): Sea $v \in \sum_{i=1}^{n} S_i$, es claro que existen $v_1, v_2, \dots v_n$, con $(v_i \in S_i)$, tales que $v = \sum_{i=1}^{n} v_i$, $(v_i \in S_i)$. Sea j, $1 \leq j \leq n$, llamemos $T_j = \sum_{i \neq j} S_i$. Es claro que $S_j \oplus .T_j$. Ahora bien $v = v_j + \sum_{j \neq i} v_j$, como $\sum_{i \neq j} v_i \in T_j$ y $S_j \oplus .T_j$, de la proposición anterior se deduce que v_j es único.

(4)⇒(1): Sea j, $1 \leq j \leq n$, consideremos nuevamente $T_j = \sum_{i \neq j} S_i$, de (4) sabemos que para todo $v \in \sum_{i=1}^{n} S_i$, existen únios $v_j \in S_j$ y $w_j \in T_j$ tales que $v = v_j + t_j$, luego (por la proposición anterior) $S_j \cap T_j = \{0\}$ para todo j, $1 \leq j \leq n$.

$\square$

Definición 9. *Sean* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$ *espacio vectorial y* $\{S_i \,/\, i \in I\}$ *una familia de subespacios de* $\mathbb{V}$*. Decimos que la suma* $\sum_{i \in I} S_i$ *es directa si para todo* $j \in I$*,* $S_j \cap \sum_{i \neq j} S_i = \{0\}$*.*

En tal caso notamos $\sum_{i \in I} S_i = \oplus_{i \in I} S_i$*.*

Observación 10. La proposición anterior nos da una caracterización de la sumas directas de finitos subespacios de dimensión finita. Sin embargo vale la equivalencia entre (1), (3) y (4) para una cantidad arbitraria de subespacios en un espacio vectorial de dimensión infinita.