ALGEBRA LINEAL - Práctica N°2 - Segundo Cuatrimestre de 2006

Matrices y coordenadas

Ejercicio 1. Probar que los siguientes conjuntos son subespacios de $K^{n\times n}$ y calcular su dimensión.

i) $S_1 = \{A \in K^{n\times n} /\ A = A^t\}$ (matrices simétricas)

ii) $S_2 = \{A \in K^{n\times n} /\ A = -A^t\}$ (matrices antisimétricas)

iii) $S_3 = \{A \in K^{n\times n} /\ A_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$ (matrices triangulares superiores)

iv) $S_4 = \{A \in K^{n\times n} /\ A_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\}$ (matrices diagonales)

v) $S_5 = \{A \in K^{n\times n} /\ A_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ y } A_{11} = A_{22} = ... = A_{nn}\}$ (matrices escalares)

vi) $S_6 = \{A \in K^{n\times n} /\ tr(A) = 0\}$

Ejercicio 2. Sean S_1 , S_2 , S_5 y S_6 los subespacios del ejercicio anterior.

i) Probar que $S_1 \oplus S_2 = K^{n\times n}$ si $2 \neq 0$ en K.

ii) Probar que $S_5 \oplus S_6 = K^{n\times n}$ si $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Ejercicio 3. Sean m, n y $r \in \mathbb{N}$. Probar:

i) Si $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{n\times r}$ con $B = (b_{ij})$ y, para $1 \leq j \leq r$, $B_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ (la columna j-ésima de B), entonces $A.B = (\ A.B_1 \mid \dots \mid A.B_r)$ (es decir, $A.B_j$ es la columna j-ésima de $A.B$).

ii) Sean A, $A' \in K^{n\times n}$; B, $B' \in K^{n\times m}$; C, $C' \in K^{m\times n}$ y D, $D' \in K^{m\times m}$.
Sean M, $M' \in K^{(n+m)\times(n+m)}$ definidas por $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$.
Entonces $M.M' = \begin{pmatrix} A.A' + B.C' & A.B' + B.D' \\ C.A' + D.C' & C.B' + D.D' \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4.

i) Caracterizar el conjunto $\{A \in K^{n\times n} /\ A.B = B.A \ \forall B \in K^{n\times n}\}$.

ii) Sea $A \in K^{n\times n}$. Probar que el conjunto S de todas las matrices que conmutan con A es un subespacio de $K^{n\times n}$. Probar que $I_n \in S$ y que $A^j \in S \ \forall j \in \mathbb{N}$.

iii) Sea $A \in K^{n\times n}$ con $n \geq 2$. Probar que el conjunto $\{I_n, A, A^2, A^3, \dots, A^{n^2-1}\}$ es linealmente dependiente.

iv) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre A y $B \in K^{n\times n}$ para que

a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

b) $A^2 - B^2 = (A - B).(A + B)$

v) Probar que si A y $B \in K^{n\times n}$ no necesariamente vale $A^2.B^2 = (A.B)^2$

Ejercicio 5. Sean A, B y $C \in K^{n\times n}$ $(n \geq 2)$. Mostrar la falsedad de las siguientes afirmaciones:

i) $A.B = 0 \;\Rightarrow\; A = 0$ ó $B = 0$

ii) $A.B = A.C$ y $A \neq 0 \;\Rightarrow\; B = C$

iii) $A.B = 0 \;\Rightarrow\; B.A = 0$

iv) $A^j = 0 \;\Rightarrow\; A = 0$

v) $A^2 = A \;\Rightarrow\; A = 0$ ó $A = I_n$

Ejercicio 6. Sea $A \in K^{n\times n}$. Probar que el conjunto $T = \{B \in K^{n\times n} / \, A.B = 0\}$ es un subespacio de $K^{n\times n}$. Si $S \subset K^n$ es el subespacio de soluciones del sistema homogéneo cuya matriz asociada es A, probar que $\dim T = n.\dim S$.

Ejercicio 7. Sean $A, A' \in K^{m\times n}$; $B \in K^{n\times r}$; $D, D' \in K^{n\times n}$; $\alpha \in K$. Probar:

i) $(A + A')^t = A^t + (A')^t$

ii) $(\alpha.A)^t = \alpha.A^t$

iii) $(A.B)^t = B^t.A^t$

iv) $tr(D + D') = tr(D) + tr(D')$

v) $tr(\alpha.D) = \alpha.tr(D)$

vi) $tr(D.D') = tr(D'.D)$

Ejercicio 8. Sean A y $B \in K^{n\times n}$.

i) Probar que si A y B son triangulares superiores, $A.B$ es triangular superior.

ii) Probar que si A y B son diagonales, $A.B$ es diagonal.

(*) iii) Probar que si A es estrictamente triangular superior (es decir, $A_{ij} = 0$ si $i \geq j$), $A^n = 0$.

Ejercicio 9. Sea $A \in K^{n\times n}$.

i) Probar que $A.A^t$ y $A^t.A$ son simétricas. Encontrar un ejemplo donde $A.A^t \neq A^t.A$.

ii) El producto de dos matrices simétricas, ¿es una matriz simétrica?

iii) Si $K = \mathbb{R}$, probar que $A = 0 \iff A.A^t = 0 \iff tr(A.A^t) = 0$.

Ejercicio 10. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

i) Hallar b y $c \in \mathbb{R}$ tales que $A^2 + b.A + c.I_2 = 0$.

ii) Calcular $A^n \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 11. Sea $A \in K^{2\times 2}$ con $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y sea $\Delta = a.d - b.c$. Probar que, si $\Delta \neq 0$, $A \in GL(2, K)$ y $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta} . \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Ejercicio 12. Sea $A \in GL(n, K)$ y $B\,,\, C \in K^{n\times m}$. Probar:

i) $A.B = A.C \;\Rightarrow\; B = C$

ii) $A.B = 0 \;\Rightarrow\; B = 0$

Ejercicio 13. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

i) $A\,,\, B \in GL(n, K) \;\Rightarrow\; A + B \in GL(n, K)$

ii) $A \in GL(n, K) \iff A^t \in GL(n, K)$

iii) $tr(A) = 0 \;\Rightarrow\; A \notin GL(n, K)$

iv) A nilpotente (es decir, $\exists\, j \in \mathbb{N} \,/\, A^j = 0$) $\;\Rightarrow\; A \notin GL(n, K)$

Ejercicio 14. Sea $A \in K^{m\times n}$ y sea $b \in K^m$. Sea $H = \{x \in K^n \,/\, A.x = b\}$. Probar:

i) Si $C \in GL(m, K)$, entonces $H = \{x \in K^n \,/\, (C.A).x = C.b\}$.

ii) Si $m = n$ y $A \in GL(n, K)$, entonces H tiene un solo elemento. ¿Cuál es? (Notar que esto significa que si A es inversible, cualquier sistema lineal cuya matriz asociada sea A tiene solución única).

Ejercicio 15. Para cada i, j $(1 \leq i, j \leq n)$, sea $E^{ij} \in K^{n\times n}$ la matriz:

$$(E^{ij})_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ y } j = l \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Las matrices E^{ij} se llaman *matrices canónicas* de $K^{n\times n}$.

i) Si $a \in K - \{0\}$ y $1 \leq i \leq n$, se define $M_i(a) \in K^{n\times n}$ como

$$M_i(a) = E^{11} + E^{22} + ... + a.E^{ii} + E^{(i+1)(i+1)} + ... + E^{nn} = I_n + (a-1).E^{ii}.$$

Escribir todas las posibles $M_i(a)$ para $n = 2, 3, 4$ $(a \in K)$.

ii) Sean $1 \leq i, j \leq n$, con $i \neq j$. Se define la matriz $P^{ij} \in K^{n\times n}$ como la matriz que se obtiene permutando la fila i con la fila j de la matriz identidad. Comprobar que

$$P^{ij} = I_n - E^{ii} - E^{jj} + E^{ij} + E^{ji}.$$

Escribir todas las posibles P^{ij} para $n = 2, 3, 4$.

iii) Sean $1 \leq i, j \leq n$, con $i \neq j$ y $a \in K$. Se define la matriz $T^{ij}(a) \in K^{n\times n}$ como

$$T^{ij}(a) = I_n + a.E^{ij}.$$

Escribir todas las posibles $T^{ij}(a)$ para $n = 2, 3, 4$ ($a \in K$).

Las matrices $M_i(a)$, P^{ij} y $T^{ij}(a)$ se llaman *matrices elementales* de $K^{n\times n}$.

Ejercicio 16. Sean $M_i(a)$, P^{ij} y $T^{ij}(a)$ las matrices elementales de $K^{n\times n}$. Probar:

i) $M_i(a) \in GL(n, K)$ con $(M_i(a))^{-1} = M_i(a^{-1})$

ii) $P^{ij} \in GL(n, K)$ con $(P^{ij})^{-1} = P^{ij}$

iii) $T^{ij} \in GL(n, K)$ con $(T^{ij}(a))^{-1} = T^{ij}(-a)$

Ejercicio 17.

i) Sea $A = T^{12}(1) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Calcular A^{20} y $20.A$.

ii) Calcular $(P^{ij})^{15}$ y $(P^{ij})^{16}$.

iii) Sea $B = M_3(2) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Calcular B^{20} y $20.B$.

Ejercicio 18. Averiguar si las siguientes matrices son inversibles y en caso afirmativo exhibir sus inversas.

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ii) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

iv) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ v) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Escribir las que sean inversibles como producto de matrices elementales.

Ejercicio 19. Sea $A \in K^{n\times n}$ y sea $b \in K^n$.

i) Probar que el sistema $A.x = b$ tiene solución única $\iff A \in GL(n, K)$.

ii) Probar que $A \in GL(n, K) \iff$ las filas de A son linealmente independientes $\iff$ las columnas de A son linealmente independientes.

Ejercicio 20. Sean $M \in K^{n\times m}$, $A \in GL(n, K)$ y $S \subseteq K^n$ subespacio.

i) Probar que $A.S = \{A.x \,/\, x \in S\}$ es un subespacio de K^n y que $dim(S) = dim(A.S)$.
Deducir que $r_c(M) = r_c(A.M)$.

ii) Probar que $r_f(M) = r_c(M)$.

Ejercicio 21. Sea $A \in K^{n\times n}$. Probar que:

$$\exists\, B \in K^{n\times n} /\, B.A = I_n \iff A \in GL(n, K).$$

Deducir que $\exists\, B \in K^{n\times n} /\, A.B = I_n \iff A \in GL(n, K)$.

Ejercicio 22. Encontrar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base B en los siguientes casos:

i) $V = K^n$; $v = (x_1, \dots, x_n)$ y B la base canónica

ii) $V = \mathbb{R}^3$; $v = (1, 2, -1)$ y $B = \{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$

iii) $V = \mathbb{R}^3$; $v = (1, -1, 2)$ y $B = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, 2)\}$

iv) $V = \mathbb{R}^3$; $v = (x_1, x_2, x_3)$ y $B = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, 2)\}$

v) $V = \mathbb{R}_3[X]$; $v = 2X^2 - X^3$ y $B = \{3\, ,\, 1 + X\, ,\, X^2 + 5\, ,\, X^3 + X^2\}$

vi) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$; $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$

Ejercicio 23. Calcular $C(B, B')$ en los siguientes casos:

i) $V = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1, 1), (1, 2)\}$, $B' = \{(-1, 3), (2, 5)\}$

ii) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$, $B' = \{(-1, 1, 1), (2, 0, 1), (1, -1, 3)\}$

iii) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$, $B' = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$

iv) $V = \mathbb{R}_2[X]$, $B = \{3\, ,\, 1 + X\, ,\, X^2\}$, $B' = \{1\, ,\, X + 3\, ,\, X^2 + X\}$

v) $V = \mathbb{R}^4$, $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $B' = \{v_3, v_1, v_4, v_2\}$

vi) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B = \{E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22}\}$,
$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$

Ejercicio 24. Dado $v \in V$ y las bases B y B', hallar las coordenadas de v respecto de B y utilizando la matriz de cambio de base, las coordenadas de v respecto de B'.

i) $v = (2, 3)$ y B, B' como en el Ejercicio 24, i)

ii) $v = (-1, 5, 6)$ y B, B' como en el Ejercicio 24, ii)

iii) $v = (-1, 5, 6)$ y B, B' como en el Ejercicio 24, iii)

iv) $v = 2.v_1 + 3.v_2 - 5.v_3 + 7.v_4$ y B, B' como en el Ejercicio 24, v)

v) $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y B, B' como en el Ejercicio 24, vi)

Ejercicio 25.

i) Sean $A\,,\, B\, \in K^{n\times n}$ tales que, $\forall\, x \in K^n$, $A.x = B.x$. Probar que $A = B$.

ii) Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sean B, B' y B'' bases de V. Probar que $C(B, B'') = C(B', B'').C(B, B')$.

iii) Deducir que $C(B, B') \in GL(n, K)$ con $C(B, B')^{-1} = C(B', B)$.

Ejercicio 26. Dadas la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de K^3, hallar una base B' tal que $M = C(B, B')$.

Ejercicio 27. Dadas la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la base $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ de K^3, hallar una base B tal que $M = C(B, B')$.