

ALGEBRA LINEAL - Práctica N°5 - Segundo Cuatrimestre de 2006

Espacio Dual

Ejercicio 1. Sea $S \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$ el subespacio $S = \{\varphi \in (\mathbb{R}^3)^* / \varphi(1, -1, 2) = 0\}$. Encontrar una base de S .

Ejercicio 2. Dada la base B del K -espacio vectorial V , hallar su base dual en cada uno de los siguientes casos:

i) $V = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1, -1), (2, 0)\}$

ii) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1, -1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

iii) $V = \mathbb{R}_3[X]$, $B = \{-X + 2, X - 1, X^2 - 3.X + 2, X^3 - 3.X^2 + 2.X\}$

Ejercicio 3. Sea $B' = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ la base de $(\mathbb{R}^3)^*$ definida por

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 \quad \varphi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3 \quad \varphi_3(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3$$

Hallar la base B de \mathbb{R}^3 tal que $B' = B^*$.

Ejercicio 4. Sean f_1, f_2 y $f_3 \in (\mathbb{R}_2[X])^*$ las siguientes formas lineales:

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x) dx \quad f_2(p) = \int_0^2 p(x) dx \quad f_3(p) = \int_{-1}^0 p(x) dx$$

i) Probar que $\{f_1, f_2, f_3\}$ es una base de $(\mathbb{R}_2[X])^*$.

ii) Hallar una base B de $\mathbb{R}_2[X]$ tal que $B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$.

Ejercicio 5. Sea V un K -espacio vectorial de dimensión n .

i) Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in V^* - \{0\}$. Demostrar que $\text{Nu}(\varphi_1) = \text{Nu}(\varphi_2) \iff \{\varphi_1, \varphi_2\}$ es linealmente dependiente.

ii) Sean φ_i ($1 \leq i \leq r$) formas lineales en V^* y sea $\varphi \in V^*$ tales que

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \dots = \varphi_r(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0.$$

Probar que $\varphi \in \langle \varphi_1, \dots, \varphi_r \rangle$.

iii) Sean φ_i ($1 \leq i \leq n$) formas lineales en V^* . Probar que

$$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \text{ es base de } V^* \iff \bigcap_{i=1}^n \text{Nu}(\varphi_i) = 0$$

Ejercicio 6. Sea $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ definida por $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 2.x_1 + 3.x_2 - x_3$ y sea $E^* = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$ la base dual de la canónica.

- i) Calcular las coordenadas de φ en E^* .
- ii) Calcular las coordenadas de φ en la base $B^* = \{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3, \delta_1 + \delta_2, \delta_1\}$.
- iii) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ el subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / 2.x_1 + 3.x_2 - x_3 = 0\}$ y sea $B \subset \mathbb{R}^3$ la base $B = \{(0, 0, 1), (0, 1, -1), (1, -1, 0)\}$. Encontrar una ecuación para S en la base B .
(Sugerencia: notar que B^* es la base dual de B y no hacer ninguna cuenta.)

Ejercicio 7. Sea $B \subset \mathbb{R}^2$ la base $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$. Encontrar las coordenadas de la base dual de B en la base dual de la canónica.

Ejercicio 8. Sean B y B_1 las bases de \mathbb{R}^3 definidas por $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ y $B_1 = \{(1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1)\}$. Si $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ tiene coordenadas $(1, -3, 2)$ respecto de B^* , calcular sus coordenadas respecto de B_1^* .

Ejercicio 9. Hallar una base de $S^\circ \subseteq V^*$ en los siguientes casos:

- i) $V = \mathbb{R}^3$ y $S = \langle (1, -1, 2), (2, 1, 3), (1, 5, 0) \rangle$
- ii) $V = \mathbb{R}^4$ y $S = \langle (1, 1, -1, 1), (2, -1, 3, 1) \rangle$
- iii) $V = \mathbb{R}^3$ y $S = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2.x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\}$
- iv) $V = \mathbb{R}^4$ y $S = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2.x_1 + x_2 - 2.x_3 + 3.x_4 = 0 \\ 4.x_1 - x_2 + 5.x_4 = 0 \end{cases} \right\}$

Ejercicio 10. Sea $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ y sea $W = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / A.B = 0\}$. Sea $f \in W^\circ$ tal que $f(I_2) = 0$ y $f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$. Calcular $f(B)$.

Ejercicio 11. Para los siguientes subespacios S y T de V , determinar una base de $(S + T)^\circ$ y una base de $(S \cap T)^\circ$.

- i) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \langle (1, 1, -1, 1), (2, -1, 3, 1) \rangle$, $T = \langle (2, -4, 8, 0), (-1, 1, 2, 3) \rangle$
- ii) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) / \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$, $T = \langle (2, 1, 3, 1) \rangle$
- iii) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \left\{ (x_1, x_2, x_3) / \begin{cases} x_1 - 2.x_2 + x_3 = 0 \\ 3.x_2 - 2.x_3 = 0 \end{cases} \right\}$,
 $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / 2.x_1 - x_2 = 0\}$

Ejercicio 12. Sea V un K -espacio vectorial de dimensión finita y sean S y T subespacios tales que $V = S \oplus T$. Probar que $V^* = S^\circ \oplus T^\circ$.

Ejercicio 13. Sea V un \mathbb{Z}_p -espacio vectorial de dimensión n . Probar que

$$\#\{S \subseteq V \text{ subespacio} / \dim(S) = 1\} = \#\{S \subseteq V \text{ subespacio} / \dim(S) = n - 1\}.$$

Calcular dicho número.

Ejercicio 14. Sea $tr : K^{n \times n} \rightarrow K$ la forma lineal traza y dado $a \in K^{n \times n}$ se define $f_a : K^{n \times n} \rightarrow K$ como $f_a(x) = tr(ax)$.

- i) Probar que $f_a \in (K^{n \times n})^* \forall a \in K^{n \times n}$.
- ii) Probar que $f_a(x) = 0 \forall x \in K^{n \times n} \Rightarrow a = 0$.
- iii) Se define $\gamma : K^{n \times n} \rightarrow (K^{n \times n})^*$ como $\gamma(a) = f_a$. Probar que γ es un isomorfismo.
- iv) Sea $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 3.a_{11} - 2.a_{12} + 5.a_{22}.$$

Encontrar una matrix $a \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / \gamma(a) = f$.

Ejercicio 15. Sea $\varphi \in (K^{n \times n})^*$ tal que $\varphi(a.b) = \varphi(b.a) \forall a, b \in K^{n \times n}$. Probar que $\exists \alpha \in K$ tal que $\varphi = \alpha.tr$. Deducir que si $\varphi(a.b) = \varphi(b.a) \forall a, b \in K^{n \times n}$ y $\varphi(I_n) = n$ entonces $\varphi = tr$.

Ejercicio 16. Sean $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in K$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$. Para cada i , $0 \leq i \leq n$, se define $\epsilon_{\alpha_i} : K_n[X] \rightarrow K$ como $\epsilon_{\alpha_i}(P) = P(\alpha_i)$.

- i) Probar que $B_1 = \{\epsilon_{\alpha_0}, \dots, \epsilon_{\alpha_n}\}$ es una base de $(K_n[X])^*$.
- ii) Sea $B = \{P_0, \dots, P_n\}$ la base de $K_n[X]$ tal que $B^* = B_1$. Probar que el polinomio

$$P = \sum_{i=0}^n \beta_i.P_i$$

es el único polinomio en $K[X]$ de grado menor o igual que n tal que, $\forall i$, $0 \leq i \leq n$, $P(\alpha_i) = \beta_i$. Este polinomio se llama el *polinomio interpolador de Lagrange*.

- iii) Probar que existen números reales a_0, \dots, a_n tales que, para todo $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\int_0^1 P(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i.P(\alpha_i).$$

Hallar a_0, a_1 y a_2 en el caso en que $n = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ y $\alpha_2 = 0$.

Ejercicio 17. Sean V y W K -espacios vectoriales de dimensión finita y sea $f : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Se define la función $f^t : W^* \rightarrow V^*$ de la siguiente manera:

$$f^t(\varphi) = \varphi \circ f \quad \forall \varphi \in W^*.$$

f^t se llama la función *transpuesta* de f .

- i) Probar que f^t es una transformación lineal.
- ii) Probar que $(\text{Im}(f))^\circ = \text{Nu}(f^t)$ y que $\text{Im}(f^t) = (\text{Nu}(f))^\circ$.
- iii) Sean $V = \mathbb{R}^2$ y $W = \mathbb{R}^3$ y sea $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_1, x_1 - 2x_2)$.
Si $B = \{(1, 2), (1, 3)\}$ y $B_1 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$, calcular $|f|_{BB_1}$ y $|f^t|_{B_1^*B^*}$.
- iv) Si B y B_1 son bases de V y W respectivamente, probar que

$$|f^t|_{B_1^*B^*} = (|f|_{BB_1})^t.$$

(*) **Ejercicio 18.** Sea V un \mathbb{C} -espacio vectorial. Sean $f, g \in V^*$ tales que $f \cdot g \in V^*$. Probar que $f = 0$ ó $g = 0$.

(*) **Ejercicio 19.** Sea V un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión finita. Sean $v_1, \dots, v_n \in V$ vectores no nulos. Probar que existe una forma lineal $f \in V^*$ / $f(v_i) \neq 0 \forall i, 1 \leq i \leq n$.