ALGEBRA LINEAL - Práctica N°7 - Segundo Cuatrimestre de 2006

Forma de Jordan

Ejercicio 1. Dadas las matrices A y A' en $K^{n\times n}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

i) Probar que ambas son nilpotentes y que A es semejante a A'.

ii) Dar bases B y B' de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tal que la matriz de la derivación en la base B sea A y en la base B' sea A'.

iii) Sea B una base de K^n y sea $f : K^n \to K^n$ tal que $|f|_B = A$. Probar que no existen subespacios propios f-invariantes S y T de K^n tales que $K^n = S \oplus T$.

Ejercicio 2. Sean A_i $(1 \le i \le 6)$ matrices en $\mathbb{C}^{8\times 8}$ nilpotentes tales que $m_{A_i} = X^3$ $(1 \le i \le 6)$. ¿Es cierto que necesariamente dos de estas matrices son semejantes?

Ejercicio 3. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A \in \mathbb{C}^{9\times 9}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ nilpotentes tales que $m_A = m_B$ y $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$. Probar que A y B son semejantes. ¿Es cierto esto en $\mathbb{C}^{7\times 7}$?

Ejercicio 5. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \le j \\ 1 & \text{si } i > j \end{cases}$$

Ejercicio 6.

i) Decidir si existe $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ nilpotente tal que $\text{rg}(A) = 6$, $\text{rg}(A^2) = 4$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

ii) Decidir si existe $A \in \mathbb{R}^{16\times 16}$ tal que $m_A(X) = X^5$, $\text{rg}(A) = 9$, $\text{rg}(A^2) = 5$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

Ejercicio 7. Sea $f : \mathbb{C}^7 \to \mathbb{C}^7$ una transformación lineal y sea B una base de $\mathbb{C}^7$ tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

i) Hallar $\mathcal{X}_f$ y m_f.

ii) Sea λ un autovalor de f tal que $\mathrm{mult}(\lambda, \mathcal{X}_f) = m$. Se definen $E_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^7 / \, f(v) = \lambda.v\}$ y $V_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^7 / \, (\lambda.\, Id - f)^m(v) = 0\} = \mathrm{Nu}((\lambda.\, Id - f)^m)$.

¿Para qué autovalores λ de f se tiene que $E_\lambda = V_\lambda$?

iii) Para cada autovalor λ de f, ¿cuál es la menor potencia k tal que $V_\lambda = \mathrm{Nu}((\lambda.\, Id - f)^k)$?

iv) Si λ es un autovalor de f, se nota f_λ a la restricción de f a V_λ. Calcular $\dim(\mathrm{Im}(f_\lambda))$ y $\dim(\mathrm{Im}(f_\lambda^2))$ para cada λ.

Ejercicio 8. Sea V un K-espacio vectorial, sea $f : V \to V$ una transformación lineal y sea $P \in K[X]$.

i) Probar que $\mathrm{Nu}(P(f))$ e $\mathrm{Im}(P(f))$ son subespacios invariantes por f.

ii) Probar que si un autovalor λ de f es raíz de P, entonces $E_\lambda \subseteq \mathrm{Nu}(P(f))$.

iii) Probar que si un autovalor λ de f no es raíz de P, entonces $E_\lambda \subseteq \mathrm{Im}(P(f))$.

Ejercicio 9. Sean A y $B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. Probar que A es semejante a B si y sólo si $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B$ y $m_A = m_B$. ¿Es válida esta afirmación en $\mathbb{C}^{3\times 3}$? ¿Y en $\mathbb{C}^{4\times 4}$?

Ejercicio 10. Hallar la forma y una base de Jordan de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ en cada uno de los siguientes casos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 11. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & a \\ 3 & -1 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

i) Para cada $a \in \mathbb{R}$, calcular $\mathcal{X}_A$, m_A y hallar la forma de Jordan de A.

ii) Para $a = 2$, hallar una base de Jordan para A.

Ejercicio 12. Sea $V \subseteq C^{\infty}(\mathbb{R})$ el subespacio $V = < e^x,\, x.e^x,\, x^2.e^x,\, e^{2x} >$. Sea $\delta : V \to V$ la transformación lineal definida por $\delta(f) = f'$. Hallar la forma y una base de Jordan para δ.

Ejercicio 13. Sean $A\,,\, B \in \mathbb{C}^{\,4\times 4}$ las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Decidir si A y B son semejantes.

Ejercicio 14. Sean $A,\, B \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ tales que $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B = (X-1)^3.(X-3)^2$ y $m_A = m_B$. Decidir si, necesariamente, A es semejante a B.

Ejercicio 15. Encontrar todas las formas de Jordan posibles de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ en cada uno de los siguientes casos:

i) $\mathcal{X}_A(X) = (X-2)^4(X-3)^2$; $\quad m_A(X) = (X-2)^2(X-3)^2$

ii) $\mathcal{X}_A(X) = (X-7)^5$; $\quad m_A(X) = (X-7)^2$

iii) $\mathcal{X}_A(X) = (X-2)^7$; $\quad m_A(X) = (X-2)^3$

iv) $\mathcal{X}_A(X) = (X-3)^4(X-5)^4$; $\quad m_A(X) = (X-3)^2(X-5)^2$

Ejercicio 16. Sea $A \in \mathbb{C}^{15\times 15}$ una matriz con autovalores λ_1, λ_2 y λ_3 y que cumple, simultáneamente:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rg}(A-\lambda_1.I) = 13, \quad \operatorname{rg}(A-\lambda_1.I)^2 = 11, \quad \operatorname{rg}(A-\lambda_1.I)^3 = 10, \quad \operatorname{rg}(A-\lambda_1.I)^4 = 10,\\
&\operatorname{rg}(A-\lambda_2.I) = 13, \quad \operatorname{rg}(A-\lambda_2.I)^2 = 11, \quad \operatorname{rg}(A-\lambda_2.I)^3 = 10, \quad \operatorname{rg}(A-\lambda_2.I)^4 = 9,\\
&\operatorname{rg}(A-\lambda_3.I) = 13, \quad \operatorname{rg}(A-\lambda_3.I)^2 = 12, \quad \operatorname{rg}(A-\lambda_3.I)^3 = 11.
\end{aligned}$$

Hallar su forma de Jordan.

Ejercicio 17. Dar la forma de Jordan de una matriz $A \in \mathbb{C}^{14\times 14}$ que verifica, simultáneamente:

$$m_A = (X-\lambda_1)^2.(X-\lambda_2).(X-\lambda_3)^2.(X-\lambda_4)^3 \quad (\text{con } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j),$$

$$\operatorname{rg}(A-\lambda_1.I) = 11,\ \operatorname{rg}(A-\lambda_1.I)^2 = 10,\ \operatorname{rg}(A-\lambda_3.I) = 12,\ \operatorname{rg}(A-\lambda_3.I)^2 = 10 \text{ y}$$

$$\operatorname{rg}(A-\lambda_4.I) = 13.$$

Ejercicio 18. Hallar la forma de Jordan de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n+1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & n-2 \\ & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 19. Sean $x,\, y \in \mathbb{C}^n$ y $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = x_i.y_j$.

i) Calcular todos los autovalores y autovectores de A.

ii) Calcular las posibles formas de Jordan de A.

Ejercicio 20. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Probar que A y A^t son semejantes.

Ejercicio 21. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, sea $J(\lambda, m) \in \mathbb{C}^{m\times m}$ la matriz

$$J(\lambda, m) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

i) Calcular $J(\lambda, m)^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Generalizar para cualquier potencia de una matriz formada por bloques de Jordan.

Sugerencia: $J(\lambda, m) = \lambda\, I_m + J(0, m)$.

ii) Verificar que $\mathrm{rg}(J(\lambda, m)^k - \lambda^k I_m) = m - 1$ para $\lambda \neq 0$.

iii) Si $\lambda \neq 0$, hallar la forma de Jordan de $J(\lambda, m)^k$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 22. Sea $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ una matriz tal que $m_A = X^6$ y sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ una base de Jordan para A. Calcular la forma y una base de Jordan para las matrices A^2, A^3, A^4 y A^5.

Ejercicio 23. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar $B \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ tal que $B^2 = A$.

(*) Ejercicio 24. Sean $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$. Se define la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha\,,\ a_1 = \beta \\ a_{n+2} = 4.a_{n+1} - 4.a_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Hallar una fórmula general para el término a_n, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$.
Sugerencia: Ver el razonamiento del ejercicio 8 de la práctica 6 e intentar modificarlo convenientemente utilizando el ejercicio 20 de esta práctica.

(*) Ejercicio 25. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x_1'(t) &=& 3\,x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) &=& x_1(t) + x_2(t) \\ x_3'(t) &=& -x_2(t) + 2\,x_3(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$, $x_3(0) = 1$.