ALGEBRA LINEAL - Práctica N°8 - Segundo Cuatrimestre de 2006

Espacios vectoriales con producto interno

En esta práctica, todos los espacios vectoriales serán sobre $\mathbb{R}$ o sobre $\mathbb{C}$ únicamente.

Notación: Si $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $A^* \in \mathbb{C}^{m\times n}$ denota la matriz transpuesta conjugada de A cuyos coeficientes satisfacen $(A^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}$.

Ejercicio 1. Sea V un espacio vectorial y sea $\langle , \rangle$ un producto interno sobre V. Probar:

i) $\langle x,\, y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$

ii) $\langle x,\, cy\rangle = \bar{c}\,.\,\langle x,y\rangle$

iii) $\langle x,y\rangle = \langle x,z\rangle\ \forall\, x \in V \ \Rightarrow\ y = z$

Ejercicio 2. Sea V un espacio vectorial y sea $\langle , \rangle$ un producto interno sobre V. Probar:

i) Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, entonces

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}.\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}.\|x-y\|^2 \qquad \forall\, x,y \in V.$$

ii) Si V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, entonces

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}.\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}.\|x-y\|^2 + \frac{i}{4}.\|x+i.\,y\|^2 - \frac{i}{4}.\|x-i.\,y\|^2 \qquad \forall\, x,y \in V.$$

Las igualdades anteriores se llaman *identidades de polarización*.

Ejercicio 3. Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno. Probar que $|\langle x,y\rangle| = \|x\|.\|y\|$ si y sólo si $\{x,y\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

Ejercicio 4. Sea V un espacio vectorial. Demostrar que la suma de dos productos internos sobre V es un producto interno sobre V.

Ejercicio 5. Sea V un espacio vectorial con producto interno. Se define la distancia entre dos vectores $x, y \in V$ como $d(x,y) = \|x-y\|$. Demostrar que:

i) $d(x,y) \geq 0$

ii) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

iii) $d(x,y) = d(y,x)$

iv) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Ejercicio 6. Determinar si las siguientes funciones son o no formas bilineales y cuales de ellas son productos internos. En caso afirmativo encontrar su matriz en la base canónica del espacio correspondiente.

i) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ \Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + 3.x_2.y_1 - x_2.y_2 + 3.x_1.y_2$

ii) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ \Phi(x, y) = x_1.y_1 + x_2.y_1 + 2.x_2.y_2 - 3.x_1.y_2$

iii) $\Phi : K^2 \times K^2 \to K,\ \ \Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + x_2.y_2 - x_1.y_2 - x_2.y_1,$ con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

iv) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\ \ \Phi(x, y) = 2.x_1.\overline{y}_1 + x_2.\overline{y}_2 - x_1.\overline{y}_2 - x_2.\overline{y}_1$

v) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\ \ \Phi(x, y) = 2.x_1.\overline{y}_1 + (1 + i).x_1.\overline{y}_2 + (1 + i).x_2.\overline{y}_1 + 3.x_2.\overline{y}_2$

vi) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\ \ \Phi(x, y) = x_1.\overline{y}_1 - i.x_1.\overline{y}_2 + i.x_2.\overline{y}_1 + 2.x_2.\overline{y}_2$

vii) $\Phi : K^3 \times K^3 \to K,\ \ \Phi(x, y) = 2.x_1.\overline{y}_1 + x_3.\overline{y}_3 - x_1.\overline{y}_3 - x_3.\overline{y}_1,$ con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

viii) $\Phi : K^3 \times K^3 \to K,\ \ \Phi(x, y) = 3.x_1.\overline{y}_1 + x_2.\overline{y}_1 + 2.x_2.\overline{y}_2 + x_1.\overline{y}_2 + x_3.\overline{y}_3,$ con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

Ejercicio 7. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x, y) = y.A.x^t$. Probar que Φ es un producto interno sobre $\mathbb{R}^2$ si y sólo si $A = A^t$, $A_{11} > 0$ y $\det(A) > 0$.

Ejercicio 8. Determinar para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$ es

$$\Phi(x, y) = a.x_1.y_1 + b.x_1.y_2 + b.x_2.y_1 + b.x_2.y_2 + (1 + b).x_3.y_3$$

un producto interno en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 9. Probar que las siguientes funciones definen productos internos sobre los espacios vectoriales considerados:

i) $\langle , \rangle : K^{n\times n} \times K^{n\times n} \to K,\ \ \langle A, B\rangle = tr(A.B^*),$ con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

ii) $\langle , \rangle : C[0, 1] \times C[0, 1] \to \mathbb{R},\ \ \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x).g(x)\, dx$

iii) $\langle , \rangle : K^n \times K^n \to K,\ \ \langle x, y\rangle = \overline{y}.\, Q^*.Q.\, x^t,$ con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$
donde $Q \in K^{n\times n}$ es una matriz inversible.

iv) $\langle , \rangle_T : V \times V \to K,\ \ \langle x, y\rangle_T = \langle T(x), T(y)\rangle,$ con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$
donde V y W son espacios vectoriales sobre K, $\langle\, ,\, \rangle$ es un producto interno sobre W y $T : V \to W$ es un monomorfismo.

Ejercicio 10. Restringir el producto interno del item ii) del ejercicio anterior a $\mathbb{R}_n[X]$ y calcular su matriz en la base $B = \{1, X, \ldots , X^n\}$.

Ejercicio 11.

i) Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x, y) = x_1.y_1 - 2.x_1.y_2 - 2.x_2.y_1 + 6.x_2.y_2$.

a) Probar que Φ es un producto interno.

b) Encontrar una base de $\mathbb{R}^2$ que sea ortonormal para Φ.

ii) Encontrar una base de $\mathbb{C}^2$ que sea ortonormal para el producto interno definido en el ejercicio 6. vi).

Ejercicio 12. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V.

i) Probar que existe un único producto interno en V para el cual B resulta ortonormal.

ii) Hallarlo en los casos

a) $V = \mathbb{R}^2$ y $B = \{(1, 1), (2, -1)\}$
b) $V = \mathbb{C}^2$ y $B = \{(1, i), (-1, i)\}$
c) $V = \mathbb{R}^3$ y $B = \{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$
d) $V = \mathbb{C}^3$ y $B = \{(1, i, 1), (0, 0, 1), (0, 1, i)\}$

Ejercicio 13. Hallar el complemento ortogonal de los siguientes subespacios de V:

i) $V = \mathbb{R}^3$, $\quad S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2.x_1 - x_2 = 0\}$ para el producto interno canónico.

ii) $V = \mathbb{R}^3$, $\quad S_2 = < (1, 2, 1) >$

a) Para el producto interno canónico.
b) Para el producto interno definido por $\langle x, y\rangle = x_1.y_1 + 2.x_2.y_2 + x_3.y_3 - x_1.y_2 - x_2.y_1$.

iii) $V = \mathbb{C}^3$, $\quad S_3 = < (i, 1, 1), (-1, 0, i) >$
para el producto interno $\langle , \rangle_T$ definido en el ejercicio 9. iv) con $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$

$$T(x) = \begin{pmatrix} i & -1+i & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 1 & i+1 & i \end{pmatrix} . x^t \quad \text{y} \quad \langle , \rangle \text{ el producto interno canónico sobre } \mathbb{C}^3.$$

iv) $V = \mathbb{C}^4$, $\quad S_4 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \,/\, \begin{cases} x_1 + 2i.x_2 - x_3 + (1+i).x_4 = 0 \\ x_2 + (2-i).x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$
para el producto interno $\langle x, y\rangle = x_1.\overline{y}_1 + 2.x_2.\overline{y}_2 + x_3.\overline{y}_3 + 3.x_4.\overline{y}_4$.

v) $V = \mathbb{R}^4$, $\quad S_5 = < (1, 1, 0, -1), (-1, 1, 1, 0), (2, -1, 1, 1) >$
para el producto interno canónico.

Ejercicio 14.

i) Hallar bases ortonormales para los subespacios del ejercicio anterior para cada uno de los productos internos considerados.

ii) Definir explícitamente las proyecciones ortogonales sobre cada uno de dichos subespacios.

iii) Hallar el punto de S_5 más cercano a $(0, 1, 1, 0)$.

Ejercicio 15. Sean S_1, S_2 y S_3 los subespacios de $\mathbb{R}^4$ definidos por

$$S_1 : \begin{cases} x_1 + x_2 - 2.x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2.x_1 + 2.x_4 = 0 \end{cases} \qquad S_3 : \{2.x_1 + x_2 + 2.x_3 = 0$$

Encontrar una base ortonormal $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que $v_i \in S_i$ $(i = 1, 2, 3)$. ¿Por qué este problema tiene solución?

Ejercicio 16. Se define $\langle,\rangle : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ como

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) . \, g\Big(\frac{k}{n}\Big).$$

i) Probar que $\langle,\rangle$ es un producto interno.

ii) Para $n = 2$, calcular $< X >^{\perp}$.

Ejercicio 17.

i) Se considera $\mathbb{C}^{n\times n}$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = tr(A.B^*)$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.

ii) Se considera $\mathbb{R}_3[X]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)\, dx$. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, X, X^2, X^3\}$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S = < 1 >$.

iii) Se considera $C[-1, 1]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)\, dx$. Hallar el polinomio de grado menor o igual que 3 más próximo a la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$.

Sugerencia: Observar que basta considerar el subespacio $S = < 1, x, x^2, x^3, \operatorname{sen}(\pi x) >$.

iv) Se considera $C[0, \pi]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^{\pi} f(x).g(x)\ dx$.

a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $B = \{1, \cos x, \operatorname{sen} x\}$.

b) Sea S el subespacio de $C[0, \pi]$ generado por B. Hallar el elemento de S más próximo a la función $f(x) = x$.

Ejercicio 18. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle,\rangle$. Sea $W \subseteq V$ un subespacio de dimensión finita de V. Probar que si $x \notin W$, entonces existe $y \in V$ tal que $y \in W^{\perp}$ y $\langle x, y\rangle \neq 0$.

Ejercicio 19. Cálculo de volúmenes

Consideremos $\mathbb{R}^n$ con el producto interno canónico $\langle,\rangle$.
El área del paralelogramo $P(v_1, v_2)$ que definen dos vectores v_1 y v_2 linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ se puede calcular con la fórmula "base por altura", o sea, $\|v_1\|.\,\|p_{<v_1>^{\perp}}(v_2)\|$.
El volumen del paralelepípedo $P(v_1, v_2, v_3)$ que definen tres vectores v_1, v_2, v_3 linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ sería "área de la base por altura", o sea, $\|v_1\|.\,\|p_{<v_1>^{\perp}(v_2)}\|.\,\|p_{<v_1,v_2>^{\perp}}(v_3)\|$.
Si esto se generaliza a k vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$, el volumen del paralelepípedo $P(v_1, \dots, v_k)$ sería

$$\|v_1\|.\,\|p_{<v_1>^{\perp}}(v_2)\|.\,\|p_{<v_1,v_2>^{\perp}}(v_3)\| \dots \|p_{<v_1,\dots,v_{k-1}>^{\perp}}(v_k)\|.$$

Se define entonces recursivamente el volumen del paralelepípedo $P(v_1, \dots, v_k)$ definido por los vectores linealmente independientes $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ como:

$$\begin{cases} \operatorname{vol}(P(v_1)) = \|v_1\| \\ \operatorname{vol}(P(v_1, \dots, v_k)) = \operatorname{vol}(P(v_1, \dots, v_{k-1})).\,\|p_{<v_1,\dots,v_{k-1}>^{\perp}}(v_k)\| \quad \text{para } k \geq 2. \end{cases}$$

Vamos a probar que el volumen del paralelepípedo definido por los vectores linealmente independientes $v_1, \dots, v_n$ en $\mathbb{R}^n$ es igual a $|\det(A)|$, donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz cuyas columnas son los vectores $v_1, \dots, v_n$.

i) Dados $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ se define la matriz $G(v_1, \ldots, v_k) \in \mathbb{R}^{k\times k}$ como $G(v_1, \ldots, v_k)_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$. Probar que:

a) Si $v_k \in < v_1, \ldots, v_{k-1} >$, entonces $\det(G(v_1, \ldots, v_k)) = 0$.

b) Si $v_k \in < v_1, \ldots, v_{k-1} >^{\perp}$, entonces $\det(G(v_1, \ldots, v_k)) = \det(G(v_1, \ldots, v_{k-1})). \|v_k\|^2$.

c) $\det(G(v_1, \ldots, v_k)) = \det(G(v_1, \ldots, v_{k-1})). \|p_{<v_1,\ldots,v_{k-1}>^{\perp}}(v_k)\|^2$.

ii) Probar que, si $v_1, \ldots, v_k$ son vectores linealmente independientes, $(\mathrm{vol}(P(v_1, \ldots, v_k)))^2 = \det(G(v_1, \ldots, v_k))$.

iii) Sean $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ linealmente independientes y sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz cuyas columnas son los vectores $v_1, \ldots, v_n$. Probar que $G(v_1, \ldots, v_n) = A^t. A$. Deducir que $\mathrm{vol}(P(v_1, \ldots, v_n)) = |\det(A)|$.

iv) Calcular el área del paralelogramo definido por los vectores $(2, 1)$ y $(-4, 5)$ en $\mathbb{R}^2$. Calcular el volumen del paralelepípedo definido por $(1, 1, 3)$, $(1, 2, -1)$ y $(1, 4, 1)$ en $\mathbb{R}^3$.

v) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un isomorfismo. Si $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ son linealmente independientes, probar que

$$\mathrm{vol}(P(f(v_1), \ldots, f(v_n))) = |\det f|. \mathrm{vol}(P(v_1, \ldots, v_n)).$$

Ejercicio 20. Calcular f^* para cada una de las transformaciones lineales siguientes:

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2) = (3.x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$

ii) $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, \quad f(x_1, x_2, x_3) = (2.x_1 + (1 - i).x_2, x_2 + (3 + 2i).x_3, x_1 + i.x_2 + x_3)$

iii) $B = \{(1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}, \quad f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

iv) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X], \quad f(p) = p' \quad$ (donde $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x).q(x)\, dx$).

v) $P \in GL(n, \mathbb{C}), \quad f : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}, \ f(A) = P^{-1}.A.P \quad$ (donde $\langle A, B\rangle = tr(A.B^*)$).

vi) $\mu_f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], \quad \mu_f(p) = f.p \quad$ donde $f \in \mathbb{R}[X]$ y $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x).q(x)dx$

Ejercicio 21. Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita. Sean f_1 y f_2 endomorfismos de V y sea k un escalar. Probar:

i) $(f_1 + f_2)^* = f_1^* + f_2^*$

ii) $(k.f_1)^* = \overline{k}.f_1^*$

iii) $(f_1 \circ f_2)^* = (f_2)^* \circ (f_1)^*$

iv) Si f_1 es un isomorfismo, entonces f_1^* es un isomorfismo y $(f_1^*)^{-1} = (f_1^{-1})^*$

v) $((f_1)^*)^* = f_1$

vi) $f_1^* \circ f_1 = 0 \Rightarrow f_1 = 0$

Ejercicio 22. Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una tranformación lineal. Probar que $\mathrm{Im}(f^*) = (\mathrm{Nu}(f))^\perp$.

Ejercicio 23. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-x - 3y - 2z, 4x + 6y + 2z, -3x - 3y).$$

Hallar un producto interno $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que f sea autoadjunta para $\langle , \rangle$.

Ejercicio 24. Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea S un subespacio de V. Probar que la proyección ortogonal $P : V \to V$ sobre S es autoadjunta. Calcular sus autovalores.

Ejercicio 25.

i) En cada uno de los siguientes casos, encontrar una matriz $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal tal que $O.A.O^t$ sea diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

ii) En cada uno de los siguientes casos, encontrar una matriz $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria tal que $U.A.U^*$ sea diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & i & 0 \\ 1 & 3 & 2i & 1 \\ -i & -2i & 3 & i \\ 0 & 1 & -i & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 26. Encontrar una base ortonormal B de $\mathbb{R}^2$ tal que $|f|_B$ y $|g|_B$ sean diagonales si las matrices de f y de g en la base canónica son:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 27. Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal.

Definición: Se dice que f es *normal* si $f \circ f^* = f^* \circ f$.

i) Probar que si f admite una base ortonormal de autovectores, entonces f es normal.

ii) Probar que si f es normal valen las siguientes afirmaciones:

   a) $\|f(v)\| = \|f^*(v)\| \quad \forall\, v \in V$. En particular, $\mathrm{Nu}(f) = \mathrm{Nu}(f^*)$.

   b) $\forall\, \lambda \in \mathbb{C},\ f - \lambda.\, id_V$ es normal.

c) Si v es un autovector de f de autovalor λ, entonces v es un autovector de f^* de autovalor $\overline{\lambda}$.

d) $E_\lambda = \{v \in V \,/\, f(v) = \lambda.v\}$ es f^*-invariante.

iii) Probar que si f es normal, entonces admite una base ortonormal de autovectores.

(Sugerencia: observar que $(E_\lambda)^\perp$ es f-invariante y f^*-invariante).

iv) Deducir de lo anterior que las matrices unitarias son diagonalizables sobre $\mathbb{C}$. Encontrar un ejemplo de matriz ortogonal que *no* sea diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio 28. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$.

ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, simetría respecto de la recta de ecuación $x_1 - x_2 = 0$.

iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, simetría respecto del plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

iv) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ y eje $< (1, 0, 1) >$.

Ejercicio 29. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Decidir si f es una rotación, una simetría o una composición de una rotación y una simetría. Encontrar la rotación, la simetría o ambas.

Ejercicio 30. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

i) Probar que f es una rotación.

ii) Hallar $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ g = f$.

Formas bilineales

Ejercicio 1. Probar que las siguientes funciones son formas bilineales:

i) $\Phi : K^n \times K^n \to K$ definida por $\Phi(x, y) = x.A.y^t$, donde $A \in K^{n\times n}$.

ii) $\Phi : V \times V \to K$ definida por $\Phi(v, w) = f_1(v).f_2(w)$, donde V es un K-espacio vectorial y f_1, $f_2 \in V^*$.

iii) $\Phi : K^{m\times n} \times K^{m\times n} \to K$ definida por $\Phi(A, B) = tr(A^t.C.B)$, donde $C \in K^{m\times m}$.

Ejercicio 2.

i) Para las formas bilineales sobre $\mathbb{R}^3$ del ejercicio anterior, calcular su matriz en la base $\{(1, 2, 4), (2, -1, 0), (-1, 2, 0)\}$.

ii) Para las formas bilineales simétricas del ejercicio anterior calcular su núcleo.

Ejercicio 3. Hallar una forma bilineal Φ simétrica en $\mathbb{R}^3$ tal que $\text{Nu}(\Phi) = < (1, 2, -1) >$ y $\Phi((1, 1, 1), (1, 1, 1)) < 0$. Calcular la matriz de Φ en la base canónica.

Ejercicio 4. Para cada una de las formas bilineales reales siguientes hallar una base ortonormal tal que la matriz de la forma bilineal en dicha base sea diagonal y exhibir la matriz de la forma bilineal en esta base. Calcular signatura y rango, decidir si es degenerada o no, definida (positiva o negativa), semidefinida (positiva o negativa) o indefinida.

i) $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $|\Phi|_E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

ii) $\Phi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + 2.x_1.y_3 + 2.x_3.y_1 - x_3.y_3 - x_4.y_4$.

Ejercicio 5. Para cada una de las formas bilineales simétricas reales dadas en la base canónica por las matrices siguientes, hallar una base B tal que la matriz de la forma bilineal en dicha base sea diagonal con 1, -1 y 0 en la diagonal.

i) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -9 \\ 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 & -1 \\ -2 & -5 & 6 & 9 \\ -3 & -1 & 9 & 11 \end{pmatrix}$

Ejercicio 6. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Probar que la forma bilineal que tiene a A como matriz en la base canónica es definida negativa si y sólo si los signos de los menores principales van alternándose comenzando por un signo menos.