Segundo cuatrimestre 2007

ALGEBRA LINEAL

Práctica 1: Espacios vectoriales

Sea k un cuerpo.

1. Sean V un espacio vectorial sobre k, $\lambda \in k$, $v \in$ V. Probar las siguientes afirmaciones:

   (i) $0.v = \vec{0}$
   (ii) $\lambda.\vec{0} = \vec{0}$
   (iii) $(-1).v = -v$
   (iv) $-(-v) = v$
   (v) $\lambda.v = \vec{0} \Rightarrow \lambda = 0$ ó $v = \vec{0}$
   (vi) $-\vec{0} = \vec{0}$

2. Probar en cada caso que el conjunto V, con la suma y el producto por escalares definidos en cada caso, es un espacio vectorial sobre k:

   (i) $V = k^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)/a_i \in k \; \forall\, i \in \mathbb{N}\}$, el conjunto de todas las sucesiones de elementos de k.

      a. $+ : (a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}}$
      b. $. : \lambda.(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (\lambda.a_i)_{i\in\mathbb{N}}$

   (ii) Dado X un conjunto, sea V = $k^X = \{f : X \to k$ tal que f es una función$\}$.

      a. $+ : (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall\, x \in X$
      b. $. : (\lambda.f)(x) = \lambda.f(x) \quad \forall\, x \in X$

   (iii) Dado X un conjunto, $V = \mathcal{P}(X)$, $k = \mathbb{Z}_2$.

      a. $+ : B + C = B\Delta C$
      b. $. : 0.B =, 1.B = B$

3. Sea $v_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fijo. Se define la función $f_{v_0} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como sigue:

$$f_{v_0}(x, y) = (x, y) + v_0.$$

   Interpretar geométricamente f_v y probar que $\mathbb{R}^2$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma en $\mathbb{R}^2$ y el producto por escalares definidos como sigue:

   (i) $+ : (x, y) + (x', y') := (x + x' - x_0, y + y' - y_0) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

   (ii) $. : r.(x, y) := r.(x - x_0, y - y_0) + (x_0, y_0) \quad \forall\, x, y, r \in \mathbb{R}$

4. Sea X un conjunto no vacío, V un espacio vectorial sobre k y sea $V^X = \{f : X \to V\}$, el conjunto de todas las funciones de X en V.

   (i) Mostrar que es posible definir sobre V^X operaciones de suma y de producto por elementos de k de forma natural, de manera de que V^X resulte, con respecto a esas operaciones, un espacio vectorial sobre k.

   (ii) Si $Y \subset X$ es un subconjunto no vacío, ¿puede verse a V^Y como supespacio de V^X?

   (iii) Si $W \subset V$ es un subespacio vectorial, ¿puede verse a W^X como subespacio de V^X?

5. Suponga que $l \subseteq k$ es un subcuerpo de k. Muestre que k es, de manera natural, un l-espacio vectorial.

6. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ un abierto no vacío. Muestre que los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$.

   (i) $C^\infty(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f$ es infinitamente diferenciable$\}$;

   (ii) $\mathbb{R}^X$;

   (iii) $C^0(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f$ es continua$\}$;

   (iv) $L = \{f \in C^1(X) : \forall x \in X, f'(x) = f(x)\}$;

   (v) $C^1(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f$ es derivable$\}$;

   (vi) $V(x_0) = \{f \in C^1(X) : \forall x \in X, f(x_0) + 3f'(x_0) = 0\}$ para $x_0 \in X$.

   Determine todas las inclusiones entre estos espacios.

7. Caracterizar geométricamente todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$.

8. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios de V como k-espacio vectorial:

   (i) $\mathrm{S}_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 / v = a(1,0,0) + b(1,1,1)\,;\, a, b \in \mathbb{R}\}\,,\ V = \mathbb{R}^3\,,\ k = \mathbb{R}$

   (ii) $\mathrm{S}_2 = \{ai / a \in \mathbb{R}\}\,,\ \mathrm{V} = \mathbb{C}\,,\ k = \mathbb{R}$, ó $k = \mathbb{C}$

   (iii) $\mathrm{S}_3 = \{f \in k[X] / f = 0 \text{ ó } \mathrm{gr} f \geq 2\}\,,\ V = k[X]$

   (iv) $\mathrm{S}_4 = \{f \in k[X] / f = 0 \text{ ó } \mathrm{gr} f \leq 5\}\,,\ V = k[X]$

   (v) $\mathrm{S}_5 = \{M \in k^{4\times 4} \,/\, M^t = M\}\,,\ V = k^{4\times 4}$

   (vi) $\mathrm{S}_6 = \{M \in k^{3\times 3} \,/\, tr(M) = 0\}\,,\ V = k^{3\times 3}$

   (vii) $\mathrm{S}_7 = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})\,,\ V = \mathbb{R}^\mathbb{R}\,,\ k = \mathbb{R}$

   (viii) $\mathrm{S}_8 = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \,/\, f''(1) = f(2)\}\,,\ V = \mathbb{R}^\mathbb{R}\,,\ k = \mathbb{R}$

   (ix) Dados a y $b \in \mathbb{R}$ fijos, $\mathrm{S}_9 = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \,/\, f'' + af' + bf = 0\}\,,\ V = \mathbb{R}^\mathbb{R}\,,\ k = \mathbb{R}$

   (x) $\mathrm{S}_{10} = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \,/\, \int_0^1 f(x)dx = 0\}\,,\ V = \mathbb{R}^\mathbb{R}\,,\ k = \mathbb{R}$

   (xi) $\mathrm{S}_{11} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in k^\mathbb{N} / \exists\, s \in \mathbb{N}$, tal que $a_r = 0\ \forall\, r \geq s\}\,,\ V = k^\mathbb{N}$

9. Sea $A \in M_{n,m}(k)$ una matriz de $n \times m$ con coeficientes en k, y sea $S = \{x \in k^m : Ax = 0\}$ el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo asociado a A.

   Muestre que S es un subespacio vectorial de k^m.

10. Sean S y T subespacios de un k-espacio vectorial V:

    (i) Probar que $S \cap T$ es un subespacio de V.

    (ii) Encontrar S y T subespacios de $V = \mathbb{R}^2$ tales que $S \cup T$ no sea subespacio.

    (iii) Probar que $S \cup T$ es un subespacio de $V \iff S \subseteq T$ ó $T \subseteq S$.

11. (i) Encontrar un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^2$ que sea cerrado para la suma y para la resta pero no para el producto por escalares.

    (ii) Encontrar un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^2$ que sea cerrado para el producto por escalares pero no para la suma.

12. Mostrar que los siguientes conjuntos no son sub-$\mathbb{R}$-espacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.

    (i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

    (ii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

    (iii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 < 0\}$.

13. Encuentre todos los subespacios vectoriales de los $\mathbb{Z}_p$-espacios vectoriales $\mathbb{Z}_p^2$ y $\mathbb{Z}_p^3$ para $p \in \{2, 3\}$.

14. Dado el subespacio

$$S = \langle (1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4.$$

    (i) ¿$(2, 1, 3, 5)$ está en S?

    (ii) ¿Es $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$?

    (iii) ¿Es $\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$?

15. Determine dos sistemas de generadores para cada uno de los siquientes espacios vectoriales:

    (i) k^n sobre k;

    (ii) $k[X]_n = \{f \in k[X] : f = 0 \vee \deg f \leq n\}$ sobre k;

    (iii) $k[X]$ sobre k;

    (iv) $\mathbb{C}^n$, con $k = \mathbb{R}$;

    (v) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0, x - y = 0\}$, con $k = \mathbb{R}$;

    (vi) $\{(x, y, z) \in k^3 : x + y - z = 0, x - y = 0\}$, con k arbitrario;

    (vii) $\{f \in k[X]_4 : f(1) = 0, f(2) = f(3)\}$, con $k = \mathbb{Q}$;

    (viii) $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f''' = 0\}$, con $k = \mathbb{R}$.

16. Sea V un k-espacio vectorial y sean $v_1, v_2, v_3 \in V$.

    Probar que si $v_1 + 3v_2 - v_3 = 0 = 2v_1 - v_2 - v_3$ entonces $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_3 \rangle$.

17. Sea X un conjunto no vacío y sea k un cuerpo.

    (i) Si X es finito, determine un sistema de generadores para k^X.

(ii) Sea
$$k_0^X = \{f \in k^X : \text{existe } Y \subset X \text{ finito tal que } f|_{X\setminus Y} \text{ es constante}\},$$
el conjunto de las funciones sobre X que son constantes fuera de un conjunto finito. Encuentre un sistema de generadores para k_0^X.
¿Puede encontrar un sistema de generadores para $k^{\mathbb{N}}$?

(iii) Si X es finito, y V es un k-espacio vectorial, determine un sistema de generadores para V^X.

18. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas:

(i) Sea V un k-espacio vectorial y sean $v\,,\, w \in V$. Entonces $\langle v\,,\, w\rangle = \langle v\,,\, w + 5v\rangle$.

(ii) Sean $v_1\,,\, v_2\,,\, v_3\,,\, v_4\,,\, w \in \mathbb{R}^7$ tales que $\langle v_1\,,\, v_2\,,\, w\rangle = \langle v_3\,,\, v_4\,,\, w\rangle$. Entonces $\langle v_1\,,\, v_2\rangle = \langle v_3\,,\, v_4\rangle$.

(iii) Sea V un k-espacio vectorial y sean $v_1\,,\, v_2\,,\, v_3\,,\, w \in V$. Entonces:
$\langle v_1\,,\, v_2\,,\, v_3\,,\, w\rangle = \langle v_1\,,\, v_2\,,\, v_3\rangle \iff w \in \langle v_1\,,\, v_2\,,\, v_3\rangle$.

19. Probar que $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \,/\, f'' + f = 0\} = \langle \mathrm{sen} x\,,\, \cos x\rangle$.

(Sugerencia: probar que si $f'' + f = 0$, entonces $\frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})\mathrm{sen} x}{\cos x}$ es una función constante en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.)

20. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$, para los cuales
$$\langle(-2,1,6),(3,0,-8)\rangle = \langle(1,k,2k),(-1,-1,k^2-2),(1,1,k)\rangle.$$

21. (i) Sea $k(X)$ el conjunto de todas las funciones racionales en la variable X, es decir, de todas las expresiones de la forma p/q con p, $q \in k[X]$ dos polinomios, y $q \neq 0$. Muestre que $k(X)$ resulta ser un cuerpo con respecto a las operaciones 'apropiadas'.

(ii) Sea $L \subset k(X)$ el subconjunto de las funciones racionales en X que son pares, es decir, de los cocientes p/q con p, $q \in k[X]$ con $q \neq 0$ y
$$\frac{p(-X)}{q(-X)} = \frac{p(X)}{q(X)}.$$
Muestre que L es un subcuerpo de $k(X)$.

(iii) Encuentre generadores para $k(X)$ considerado como espacio vectorial sobre L.

22. Decida si los siguientes conjuntos son linealmente independientes o no. En caso de no serlo, determine qué elementos pueden eliminarse de manera que el conjunto residual sea linealmente independiente y genere el mismo subespacio que el conjunto original. Finalmente, complete cada conjunto a una base del espacio ambiente.

(i) $\{(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5)\}$ en $\mathbb{R}^3$.
(ii) $\{(1,0,-1),(1,1,2),(0,1,1)\}$ en $\mathbb{C}^3$.
(iii) $\{(1,1,2),(1,4,3),(3,3,3),(e,\pi,\sqrt{2})\}$ en $\mathbb{R}^3$.
(iv) $\{(1,1,1),(1,\alpha,\alpha^2),(1,\beta,\beta^2)\}$ en $\mathbb{R}^3$ con $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

(v) $\{(1,1,1,1),(1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3),(1,\beta,\beta^2,\beta^3)\}$ en $\mathbb{R}^4$ con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(vi) $\{(1-i,i),(2,-1+i)\}$ en $\mathbb{C}^2$, para $k=\mathbb{R}$, y $k=\mathbb{C}$.

(vii) $\{(\frac{1}{2}(X-1)(X-2),(X-1)(X-3),(X-2)(X-3)\}$ en $\mathbb{R}[X]_2$.

(viii) $f(x)=\mathrm{sen}x$, $g(x)=cosx$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, para $k=\mathbb{R}$.

(ix) $f(x)=e^x, g(x)=x, h(x)=e^{-x}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ para $k=\mathbb{R}$.

(x) $\{(3+\sqrt{2},1+\sqrt{2}),(7,1+2\sqrt{2})\}$ en $\mathbb{R}^2$, para $k=\mathbb{Q}$ y $k=\mathbb{R}$.

(xi) $\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&i\\1&i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\}$ en $M_4(\mathbb{C})$, para $k=\mathbb{R}$ y $k=\mathbb{C}$.

23. Determinar todos los $\lambda\in k$ de manera que los siguientes conjuntos resulten linealmente independientes:

(i) $\{(1,2,\lambda),(1,1,1),(0,1,1-\lambda)\}$ en $\mathbb{R}^3$.

(ii) $\{\lambda X^2+X,-X^2+\lambda,\lambda^2X\}$ en $\mathbb{R}[X]_4$.

(iii) $\{\begin{pmatrix}1&\lambda\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&2\lambda\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\}$ en $M_4(\mathbb{C})$.

24. Sea V un espacio vectorial sobre k.

(i) El conjunto $\{v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_n\}\subset V$ es linealmente independiente si y sólo si el conjunto $\{v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_n\}$ es linealmente independiente.

(ii) Si $\lambda\in k\setminus\{0\}$, $\{v_1,\dots,v_i,\dots,v_n\}\subset V$ es linealmente sii el conjunto $\{v_1,\dots,\lambda v_i,\dots,v_n\}$ es linealmente independiente.

(iii) Si $\lambda\in k$, $\{v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_n\}\subset V$ es linealmente independiente sii el conjunto $\{v_1,\dots,v_i+\lambda v_j,\dots,v_j,\dots,v_n\}$

25. Sean $v_1,\dots,v_n\in\mathbb{R}^n$. Pronar que son l.i. sobre $\mathbb{R}$ sii son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$.

26. Sea $\alpha_i\in k$ para $1\le i\le n$, y sea

$$v_i=(1,\alpha_i,\alpha_i^2,\dots,\alpha_i^{n-1})\in k^n.$$

Determinar cuándo $\{v_1,\dots,v_n\}$ es linealmente independiente en k^n.

27. Hallar una base y la dimensión de los siguientes k-espacios vectoriales:

(i) $V=\langle(1,4,-2,1)\,,\,(1,-3,-1,2)\,,\,(3,-8,-2,7)\rangle\,,\;k=\mathbb{R}$

(ii) $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4\,/\,x_1+x_2+x_3+x_4=0\}$, $k=\mathbb{R}$

(iii) $V=\mathbb{C}\,,\;\;k=\mathbb{R}$ y $k=\mathbb{C}$

(iv) $V=\{f\in\mathbb{R}[X]\,/\,f=0$ ó $\mathrm{gr}(f)\le 3$ y $f(2)=f(-1)\}$, $k=\mathbb{R}$

(v) $V=\{f\in\mathbb{R}[X]\,/\,f=0$ ó $\mathrm{gr}(f)\le 3$ y f es un múltiplo de $(x^2-2)\}$, $k=\mathbb{R}$

(vi) $V=\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in \mathrm{k}^{\mathbb{N}}\,/\,a_i=a_j\;\forall\,i,j\,\}$

(vii) $V=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{R}):A=A^t\}$ sobre $\mathbb{R}$.

(viii) $V = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) : A = \bar{A}^t\}$ sobre $\mathbb{R}$.

(ix) $V = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) : tr A = 0\}$ sobre $\mathbb{R}$.

(x) $V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} : \forall n \in \mathbb{N}_0, a_{n+1} = 2a_n\}$ sobre $\mathbb{R}$.

(xi) $V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} : \forall n \in \mathbb{N}_0, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}$ sobre $\mathbb{R}$.

(xii) $V = \{p \in \mathbb{R}[X]_n : p(0) = p(1) = 0\}$ sobre $\mathbb{R}$.

(xiii) $V = \{p \in \mathbb{R}[X]_n : p(0) = p'(1) = 0\}$ sobre $\mathbb{R}$.

28. (i) Probar que el conjunto $\{(1,0,0)\,,\,(0,i,0)\,,\,(1,1,i)\}$ es base de $\mathbb{C}^3$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial pero no como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Calcular la dimensión de $\mathbb{C}^3$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

(ii) Probar que el conjunto $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial pero no como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

(iii) Probar que $\{e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. ¿Cuál es la dimensión de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial?

29. Completar los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del k-espacio vectorial V indicado:

(i) $\{(1,1,1,1)\,,\,(0,2,1,1)\}$, $V = \mathbb{R}^4$, $k = \mathbb{R}$.

(ii) $\{X^3 - 2X + 1\,,\,X^3 + 3X\}$, $V = \mathbb{R}_3[X]$, $k = \mathbb{R}$.

(iii) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $V = \mathbb{C}^{2\times 2}$, $k = \mathbb{R}$ y $k = \mathbb{C}$.

30. Extraer una base de S como k-espacio vectorial de cada uno de los siguientes sistemas de generadores:

(i) $S = \langle (1,1,2)\,,\,(1,3,5)\,,\,(1,1,4)\,,\,(5,1,1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$, $k = \mathbb{R}$.

(ii) $S = \langle X^2 + 2X + 1\,,\,X^2 + 3X + 1\,,\,X + 2\rangle \subseteq \mathbb{R}[X]$, $k = \mathbb{R}$.

(iii) $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}$, $k = \mathbb{R}$ y $k = \mathbb{C}$.

31. Sea $v_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ si $1 \le i \le n$, y supongamos que $a_{ij} \le 0$ si $i \ne j$, y que $\sum_{j=1}^n a_{ij} > 0$. Mostrar que $\{v_i\}_{1\le i\le n}$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

32. Sea $F = \{f_i\}_{i\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}[X]$ tal que $\deg f_i = i$ si $i \in \mathbb{N}_0$. Mostrar que F es una base de $\mathbb{R}[X]$.

33. Determinar si las siguientes afirmaciones son válidas:

(i) $\langle u, v\rangle = \langle u, v'\rangle \Rightarrow v = v'$, con $u, v, v' \in V$

(ii) $S + T = S + T' \Rightarrow T = T'$, con $S, T, T' \subset V$ subespacios.

(iii) $S + T = S + T' \Rightarrow \dim T = \dim T'$, con $S, T, T' \subset V$ subespacios.

34. Sea $V \subset \mathbb{R}$ el $\mathbb{Q}$-subespacio vectorial generado por $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$.

(i) Mostrar que existe $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 0$ y $\deg f \leq 4$. Determinar un tal f explícitamente.

(ii) Determinar $\dim V$.

(iii) Determinar el menor grado de un polinomio no nulo con coeficientes racionales que se anula en $\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

35. Sea $A \in M_n(k)$ una matriz. Muestre que $\{I, A, A^2, \ldots, A^{n^2-1}\}$ no es un subconjunto linealmente independiente de $M_n(k)$.

36. Sea $V = \{(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} : \forall n \geq 0,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}$.

    (i) Determine una base de V formada por sucesiones $(a_n)_{n\geq 0}$ de la forma $a_n = \alpha^n$ para algún $\alpha \geq 0$.

    (ii) Encuentre una fórmula cerrada para la sucesión $(F_n)_{n\geq 0} \in V$ de Fibonacci, caracterizada por $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$.

37. Sea V un espacio vectorial, $S, T, U \subset V$ subespacios, y supongamos que

$$S \cap T = S \cap U, \qquad S + T = S + U, \quad \text{y} \quad T \subset U.$$

    Muestre que $T = U$. ¿La conclusión puede alcanzarse si se elimina alguna de las tres hipótesis?

38. Sean S, T, U subespacios de un espacio vectorial V.

    (i) Muestre que $S \cap T + S \cap U \subset S \cap (T + U)$.

    (ii) De un ejemplo que muestre que en general no vale la igualdad.

39. En cada uno de los siguientes casos caracterizar los subespacios $S \cap T$ y $S + T$ de V. Determinar si la suma es directa:

    (i) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z)/3x - 2y + z = 0\}$ y $T = \{(x, y, z)/x + z = 0\}$.

    (ii) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z)/3x - 2y + z = 0 , x - y = 0\}$ y $T = < (1, 1, 0), (5, 7, 3) >$.

    (iii) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle (1, 1, 3), (1, 3, 5), (6, 12, 24) \rangle$ y $T = \langle (1, 1, 0), (3, 2, 1) \rangle$.

    (iv) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X]/f(1) = 0\}$ y $T = < 1 , X , X^2 , X^3 + 2X^2 - X , X^5 >$.

    (v) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X]/f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}[X]/f'(0) = f''(0) = 0\}$.

40. Determinar todos los $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales $S \cap T = \langle (0, 1, 1) \rangle$, siendo

    $S = \{x \in \mathbb{R}^3/x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = < (1, \lambda, 2), (-1, 2, \lambda) >$.

41. Sea $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

    (i) Sean $S = \{f \in V : f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}$ y $T = \{f \in V : -f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}$. Probar que S y T son subespacios de V y que $S \oplus T = V$.

    (ii) Sean $U = \{f \in V : f(0) = 0\}$ y $W = \{f \in V : f \text{es constante}\}$. Probar que U y W son subespacios de V y que $U \oplus W = V$.

42. Para cada S dado hallar $T \subseteq V$ tal que $S \oplus T = V$. En este caso, T se dice un *suplemento* de S con respecto a V:

(i) $S = \langle (1, 2, -1, 3)\, ,\, (2, 3, -2, 1)\, ,\, (0, 1, 0, 7) >$, $V = \mathbb{R}^4$.

(ii) $S = \{A \in \mathbb{R}^{4\times 4}\ /\ \mathrm{tr}(A) = 0\}\, ,\, V = \mathbb{R}^{4\times 4}$.

(iii) $S = \langle 3, 1 + X^2 \rangle$, $V = \mathbb{R}_4[X]$.

43. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar:

(i) S, T subespacios de $\mathbb{R}^3$, $dim_{\mathbb{R}} S = dim_{\mathbb{R}} T = 2 \Rightarrow \exists v \neq 0$ tal que $v \in S \cap T$.

(ii) S, T, W subespacios de $\mathbb{R}^5$, $dim_{\mathbb{R}} S = dim_{\mathbb{R}} T = dim_{\mathbb{R}} W = 2 \Rightarrow dim_{\mathbb{R}}(S \cap T \cap W) \geq 1$.

44. Sea V un k-espacio vectorial de dimensión n y sea T un hiperplano de V (es decir, un subespacio de dimensión $n - 1$):

(i) Probar que $\forall v \notin T$, $T \oplus \langle v \rangle = V$.

(ii) Si S es un subespacio de V tal que $S \not\subseteq T$, probar que $S + T = V$. Calcular $dim_k(S \cap T)$.

(iii) Si S y T son dos hiperplanos distintos, deducir cuál es la dimensión de $S \cap T$.

45. Dado $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + 2x_4 = 0, x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$, hallar dos vectores $v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que para toda elección de una base $\{v_1, v_2\}$ de S, $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sea una base de $\mathbb{R}^4$.