Segundo cuatrimestre 2007

ALGEBRA LINEAL

Práctica 3: Espacio Dual

1. Sea $B' = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ la base de $(\mathbb{R}^3)^*$ definida por:

$$\psi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 \qquad \psi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3 \qquad \psi_3(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3$$

   Hallar la base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $B' = B^*$.

2. Sean f_1 , f_2 y f_3 $\in (\mathbb{R}_2[X])^*$ las siguientes formas lineales:

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x)\,dx \qquad f_2(p) = \int_0^2 p(x)\,dx \qquad f_3(p) = \int_{-1}^0 p(x)\,dx$$

   Probar que $\{f_1 , f_2 , f_3\}$ es una base de $(\mathbb{R}_2[X])^*$. Hallar una base B de $\mathbb{R}_2[X]$ tal que $B^* = \{f_1 , f_2 , f_3\}$.

3. Sea $\psi \in (\mathbb{R}^3)^*$ definida por $\psi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2 - x_3$ y sea $E^* = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$ la base dual de la canónica.

   a) Calcular las coordenadas de ψ en la base E^*.

   b) Calcular las coordenadas de ψ en la base $B^* = \{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3, \delta_1 + \delta_2, \delta_1\}$.

   c) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ el subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3)/2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$ y sea $B \subset \mathbb{R}^3$ la base $B = \{(0, 0, 1), (0, 1, -1), (1, -1, 0)\}$. Encontrar una ecuación para S en la base B.
   (Sugerencia: notar que B^* es la base dual de B.)

4. Sean B y B_1 las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas por

$$B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\} \text{ y } B_1 = \{(1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1)\}$$

   Si $\psi \in (\mathbb{R}^3)^*$ tiene coordenadas $(1, -3, 2)$ respecto de B^*, calcular sus coordenadas respecto de B_1^*.

5. Hallar bases de S° en los siguientes casos:

   a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle(1, -1, 5), (1, 5, 0)\rangle$;

   b) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \langle(1, -1, 1, -1), (1, 2, 3, 4)\rangle$;

   c) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, x_1 - 3x_3 = 0\}$;

   d) $V = \mathbb{R}^5$, $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_1 + 2x_2 = 0, x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$;

e) $V = \mathbb{R}[X]_4$, $S = \{1 + X + X^2, 2 + X^3 + 2X^4, X^3\}$.

6. Sea $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y sea $W = \{A \in M_2(k) : AB = 0\}$. Determinar W°.

7. Determinar bases de $(S + T)^\circ$ y de $(S \cap T)^\circ$:

   a) $V = \mathbb{R}^4, S = \langle (1, -1, 2, 1), (2, -1, 3, 1) \rangle, T = \langle (3, -2, 5, 1), (0, 1, 1, 1) \rangle$;

   b) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \langle (1, 2, 1, 2), (1, -2, 1, -2) \rangle$, $T = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y - 2z + w = 0, x + y + z = 0\}$.

   c) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y = 0\}$, $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0, 2y - 2z = 0\}$.

8. Si V es un espacio vectorial, y S, T son subespacios de V tales que $V = S \oplus T$, probar que $V^* = S^\circ \oplus T^\circ$.

9. Sea k un cuerpo finito, y V un espacio vectorial de dimensión n sobre k. Sea $0 \leq l \leq n$. Mostrar que V posee tantos subespacios de dimensión l como subespacios de dimensión $n - l$.

10. Sean V y W k-espacios vectoriales y sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Se define la función $f^t : W^* \to V^*$ de la siguiente manera:

    $$f^t(\psi) = \psi \circ f \ \forall \psi \in W^*$$

    La función f^t se llama la función **traspuesta** de f.

    a) Probar que f^t es una transformación lineal.

    b) Probar que $(\operatorname{im} f)^\circ = \ker f^t$ y que $\operatorname{im} f^t = (\ker f)^\circ$.

    c) Sean $V = \mathbb{R}^2$ y $W = \mathbb{R}^3$ y sea $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_1, x_1 - 2x_2)$. Si $B = \{(1, 2), (1, 3)\}$ y $B_1 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$, calcular $[f]_{BB_1}$ y $[f^t]_{B_1^* B^*}$.

    d) Si B y B_1 son bases finitas de V y W respectivamente, probar que $[f^t]_{B_1^* B^*} = ([f]_{BB_1})^t$.

11. Sea $f : k^5 \to k^4$ la transformación lineal cuya matriz con respecto a las bases canónicas es

    $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

    Determinar el anulador del núcleo de f, la imagen de f^t, y una transformación lineal $g : k^4 \to k^5$ tal que $f \circ g = \mathrm{Id}$.

12. Sea $V = M_n(k)$ el espacio vectorial de las matrices $n \times n$, y $S \subset V$ el subespacio de las matrices simétricas. Determinar una base para S°.

13. Sea $f : k^3 \to k$ tal que $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2 + x_3$, y $g : k^3 \to k^3$ tal que su matriz con respecto a la base $\{(1, -1, 2), (-3, 5-1), (1, 3, -3)\}$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Describa el anulador de $\ker f + \ker g$.

14. Sea $f : V \to V$ un endomorfismo de un espacio vectorial V de dimensión finita. Mostrar que f posee núcleo no trivial sii f^t posee núcleo no trivial.

15. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, $S \subseteq V$ un subconjunto, y $L : V \to V^{**}$ el isomorfismo canónico. ¿Qué relación hay entre $L(S)$, $S^{\circ\circ}$ y S?

16. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y $\phi_1, \dots, \phi_n \in V^*$. Mostrar que $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ es una base de V^* si y sólo si

$$\bigcap_{1 \leq i \leq n} \ker \phi_i = \{0\}.$$

17. Sea $\mathrm{tr} : k^{n\times n} \to k$ la forma lineal traza. Dado $a \in k^{n \times n}$ se define:
$f_a : k^{n\times n} \to k$ como $f_a(x) = \mathrm{tr}(ax)$.

    a) Probar que $f_a \in (k^{n\times n})^*$ para todo $a \in k^{n\times n}$.
    b) Probar que si $f_a(x) = 0$ para todo $x \in k^{n\times n}$, entonces $a = 0$.
    c) Se define $\gamma : k^{n\times n} \to (k^{n\times n})^*$ como $\gamma(a) = f_a$. Probar que γ es un isomorfismo.
    d) Sea $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ definida por:

    $$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 3a_{11} - 2a_{12} + 5a_{22}$$

    Encontrar una matriz $a \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\gamma(a) = f$.

18. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre k. Sean $f, g : V \to k$ transformaciones lineales no nulas. Probar que:

$$\exists\ \alpha \in k,\ \alpha \neq 0\ /\ f = \alpha g \iff \ker f = \ker g$$

19. Sea V un espacio vectorial y $\mathcal{B}$ una base de V. Sea $\mathcal{B}^*$ la base dual de $\mathcal{B}$ en V^*, y $\mathcal{B}^{**}$ la base dual de $\mathcal{B}^*$ en V^{**}. Determine la matriz que representa al isomorfismo canónico $V \to V^{**}$ con respecto a las bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^{**}$.