ALGEBRA LINEAL

Práctica 0: Repaso de sistemas de ecuaciones lineales y matrices

Sistemas de ecuaciones lineales

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}$:

$$\text{i)}\left\{\begin{aligned} x_1+x_2-2x_3+x_4 &= 0\\ 3x_1-2x_2+x_3+5x_4 &= 0\\ x_1-x_2+x_3+2x_4 &= 0\end{aligned}\right. \qquad \text{ii)}\left\{\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 0\\ x_1-3x_2+x_3 &= 0\\ 3x_1-5x_2+3x_3 &= 0\\ x_1-x_2+x_3 &= 0\end{aligned}\right.$$

$$\text{iii)}\left\{\begin{aligned} x_1+x_2-2x_3+x_4 &= -2\\ 3x_1-2x_2+x_3+5x_4 &= 3\\ x_1-x_2+x_3+2x_4 &= 2\end{aligned}\right. \qquad \text{iv)}\left\{\begin{aligned} x_1+x_2+x_3-2x_4+x_5 &= 1\\ x_1-3x_2+x_3+x_4+x_5 &= 0\\ 3x_1-5x_2+3x_3+3x_5 &= 0\end{aligned}\right.$$

   ¿Cambia algo si los sistemas se resuelven en $\mathbb{Q}$ o en $\mathbb{C}$?

2. Resuelva los siguientes sistemas y compare los conjuntos de soluciones:

$$\text{i)}\ \{x+2y-3z=4 \qquad \text{ii)}\left\{\begin{aligned} x+2y-3z &= 4\\ x+3y+z &= 11\end{aligned}\right. \qquad \text{iii)}\left\{\begin{aligned} x+2y-3z &= 4\\ x+3y+z &= 11\\ 2x+5y-4z &= 13\end{aligned}\right.$$

3. Sea H un sistema lineal homogéneo de n ecuaciones con m incógnitas. Probar:
   (i) Si $n<m$, entonces H tiene alguna solución no nula.
   (ii) Si $m<n$, entonces existe un sistema lineal homogéneo H' de m ecuaciones con m incógnitas cuyo conjunto de soluciones coincide con el conjunto de soluciones de H.

4. Para cada uno de los siguientes sistemas lineales homogéneos, determinar todos los $k\in\mathbb{R}$ para los cuales el sistema tiene alguna solución no trivial:

$$\text{i)}\left\{\begin{aligned} x_1+kx_2+x_3 &= 0\\ (k+1)x_2+x_3 &= 0\\ (k^2-4)x_3 &= 0\end{aligned}\right. \qquad \text{ii)}\left\{\begin{aligned} x_1+kx_2+x_3 &= 0\\ 2x_1+x_3 &= 0\\ 2x_1+kx_2+kx_3 &= 0\end{aligned}\right.$$

5. Resolver los siguientes sistemas no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados a cada uno de ellos:

$$\text{i)}\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 1 \end{cases} \qquad \text{ii)}\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 4 \end{cases}$$

$$\text{iii)}\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1 \end{cases} \qquad \text{iv)}\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 &= \alpha \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= \beta \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= \gamma \end{cases} \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

6. Sea H un sistema lineal no homogéneo y sea p una solución de H. Sea H_0 el sistema lineal homogéneo asociado a H. Probar que si S y S_0 son los conjuntos de soluciones de H y H_0 respectivamente, entonces $S = S_0 + p = \{s + p : s \in S_0\}$.

7. Dado el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 &= \alpha_1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 &= \alpha_2 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= \alpha_3 \end{cases}$$

Determinar los valores de α_1, α_2, α_3 $\in \mathbb{R}$ para los cuales admite solución.

8. Determinar para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$ cada uno de los siguientes sistemas tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones:

$$\text{i)}\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 &= b \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= -1 \end{cases} \qquad \text{ii)}\begin{cases} ax_1 + 2x_2 + ax_3 &= 1 \\ ax_1 + (a+4)x_2 + 3ax_3 &= -2 \\ -ax_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ (a+2)x_2 + (3a+1)x_3 &= b \end{cases}$$

9. Encontrar un sistema con coeficientes reales cuya solución general sea

$$\{(1,1,0) + \lambda(1,2,1) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Matrices

10. Encuentre un contraejemplo para cada uno de las siguiente afirmaciones relativas al producto de matrices:

    (i) $AB = BA$
    (ii) $(AB)^2 = A^2B^2$
    (iii) $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$
    (iv) $AB = AC$ y $A \neq 0 \Rightarrow B = C$
    (v) $AB = 0 \Rightarrow BA = 0$
    (vi) $A^j = 0 \Rightarrow A = 0$

(vii) $A^2 = A \Rightarrow A = 0$ ó $A = I_n$

11. Sea k un cuerpo. Probar que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, el producto de matrices en $k^{n\times n}$ no es conmutativo. (Sugerencia: probarlo para $k^{2\times 2}$ y usar multiplicación por bloques.)

12. Sea k un cuerpo. Caracterizar el conjunto $\{A \in k^{3\times 3} / \, AB = BA \;\; \forall\, B \in k^{3\times 3}\}$.

13. Exhibir una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $A^2 = -I$

14. Sea k un cuerpo. Dar condiciones necesarias y suficientes sobre A y $B \in k^{n\times n}$ para que:

   (i) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

   (ii) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

15. Sea k un cuerpo.. Demostrar que si $A,\ B\ \in k^{m\times n}$ y $Ax = Bx\ \forall\, x \in k^n$, entonces $A = B$.

16. Decidir si las siguientes matrices son inversibles y, en caso afirmativo, exhibir sus inversas:

i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

iv) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ v) $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ vi) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

17. Sea k un cuerpo y sea $A \in k^{n\times n}$. Probar:

   (i) Si A es inversible entonces $AB = 0 \Rightarrow B = 0$ y $AB = AC \Rightarrow B = C$

   (ii) Si A no es inversible, existe $B \neq 0, B \in k^{n\times n}$ tal que $AB = 0$.

   (iii) A, B inversibles $\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

18. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa, donde k denota un cuerpo. Justificar:

   (i) $A\,,\ B \in k^{n\times n}$ inversibles $\Rightarrow A + B$ es inversible

   (ii) A inversible $\iff$ A^t inversible.

   (iii) A nilpotente (es decir, $\exists j \in \mathbb{N}\ /\ A^j = 0) \Rightarrow A$ no es inversible.

   Nota: Dada $A \in k^{n\times n}$, se llama **matriz transpuesta de** A a la matriz $A^t \in k^{n\times n}$ definida por $(A^t)_{ij} := (A)_{ji}, \forall\, 1 \leq i, j \leq n$.

19. Sean $A, A' \in k^{m\times n}$; $B \in k^{n\times r}$; $D, D' \in k^{n\times n}$; $\alpha \in k$. Probar:

   (i) $(A + A')^t = A^t + A'^t$
   (ii) $(\alpha.A)^t = \alpha.A^t$
   (iii) $(A.B)^t = B^t.A^t$
   (iv) $tr(D + D') = tr(D) + tr(D')$
   (v) $tr(\alpha.D) = \alpha.tr(D)$
   (vi) $tr(D.D') = tr(D'.D)$

20. Sea $A \in k^{n\times n}$.

   (i) Probar que $A.A^t$ y $A^t.A$ son matrices simétricas.
   (ii) Decidir si es cierto o no que el producto de dos matrices simétricas es una matriz simétrica. Justificar.
   (iii) Si $k = \mathbb{R}$, probar que $A = 0 \iff A.A^t = 0 \iff tr(A.A^t) = 0$.

21. Sea $A \in k^{n\times n}$ y sea $b \in k^n$. Probar que el sistema $Ax = b$ tiene solución única $\iff$ A es inversible.