Maestría en Estadística
Algebra Lineal
Práctica 1

1. Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, calcular a_{31}, a_{22}, $3A + 2B$, $A - B$, $\frac{1}{2}(A+B)$.
Hallar $D \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ tal que $3A + 2B + D$ sea la matriz nula.

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = (1,\, 2,\, -1)$ calcular los siguientes productos: $C.B$, $A.C^t$, $C.C^t$.

3.

i) Sean $A, C, D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que $A.D = A.C$. ¿Debe ser $C = D$?¿Y si $A \neq 0$?

ii) Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Calcular $(A+B)^2$, $A^2 + 2.A.B + B^2$, $A^2 - B^2$, $(A-B)(A+B)$, $(A+B)(A-B)$.
¿Qué conclusiones puede sacar?

iii) Hallar ejemplos de matrices $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que
a) $A^2 = -I = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $B^2 = 0$ pero $B \neq 0$

c) $C.D = D.C$ $(C \neq 0,\ D \neq 0)$, d) $E.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 0$ y $E \neq 0$

iv) ¿Es cierto que el producto de dos matrices triangulares superiores (resp. inferiores) es triangular superior (resp. inferior)?

v) Si A es una matriz con una fila de ceros, ¿es cierto que para toda matriz B, $A.B$ tiene una fila de ceros? (siempre que $A.B$ esté definido.) ¿Vale lo mismo con columnas?

vi) ¿Es cierto que si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ verifica $A.P = A$ con $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces la primer y tercer columna de A son iguales?¿Qué matrices $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ verifican $P.B = B$?

4.

i) Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y &= 0 \\ 3x + 6y &= 18 \end{cases}$$

a) Dibuje en el plano los gráficos de cada recta y detecte geométricamente la solución.

b) Resuelva el sistema por el método de Gauss y agregue en el gráfico la recta que se obtiene después del primer paso de eliminación.

ii) Idem si el sistema es

$$\begin{cases} x + y &= 5 \\ 2x - y &= 1 \end{cases}$$

5. Resuelva los siguientes sistemas utilizando el método de Gauss de eliminación de variables:

$$a) \begin{cases} x + y + z &= -2 \\ 3x + 3y - z &= 6 \\ x - y + z &= -1 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} 2x + y + z &= 1 \\ x - 2y + z &= 5 \\ -3y - z &= 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} u + v + w &= 0 \\ u + 2v + 3w &= 0 \\ 3u + 5v + 7w &= 7 \end{cases} \qquad d) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6. Describir todas las soluciones de los sistemas

a) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_3 &= -2 \end{cases}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$

¿Cuáles de las soluciones halladas satisfacen además $x_3 = x_4$?

7. Dado el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b$ con $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 3 & -\frac{3}{2} & -3 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, encuentre todas soluciones ¿Cuáles verifican además la condición $x + y + z = 3$? ¿Qué soluciones verfican la condición $2x - y - 2z = 2$?

8. Dado el sistema

$$\begin{cases} ax + 4y & = & 0 \\ 2x + ay + 2z & = & 0 \\ 4y + az & = & 0 \end{cases}$$

Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que : i) el sistema no admita solución, ii) el sistema admita solución única (y hallarla), iii) el sistema admita infinitas soluciones (y hallarlas todas).

9. Dada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

i) Hallar las soluciones de $A.X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ii) Hallar todas las soluciones de $A.X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

iii) Hallar todas las soluciones de $A.X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

iv) Hallar $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $A.B = I$.

v) Verificar que para la matriz B hallada en iv) vale que $B.A = I$.

10. Si $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $Ax = Bx$, $\forall x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, probar que $A = B$.

11. Encuentre las inversas de las siguientes matrices (si existen)

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$e) \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda \in \mathbb{R} \quad f) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} a \in \mathbb{R}$$

$$h) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} a \in \mathbb{R}, \quad i) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} a \in \mathbb{R}, \quad j) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} a \in \mathbb{R}$$

$$k) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad l) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad m) \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$$

12. Tres especies de bacterias coexisten en un tubo de ensayo y se alimentan con tres alimentos. Supongamos que una bacteria de la especie **i** consume una cantidad $\mathbf{a_{ij}}$ del **j**−ésimo alimento por día, según la siguiente matriz de datos

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Se proveen diariamente 15000 unidades del alimento 1, 30000 del alimento 2, 45000 del alimento 3 y todo el alimento provisto se consume.

i) ¿Puede determinarse con estos datos la cantidad de bacterias de cada especie?

ii) ¿Puede determinarse la cantidad total de bacterias?

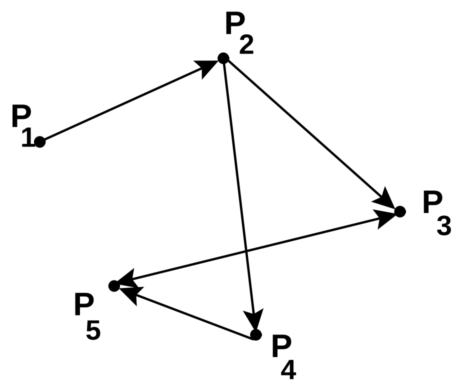
iii) ¿Es posible una población de 1000 bacterias de la tercera especie?¿Es posible una población de 2000 bacterias de la primera especie? En caso afirmativo, hallar las cantidades de bacterias de las especies restantes.

13. ¿Para qué valores de c es compatible el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ c \end{pmatrix} ?$$

14. Se tiene una pieza metálica construida con una aleación de cobre y plata que pesa $29,85$ gr y tiene un volumen de $3\,cm^3$. Sabiendo que el peso específico del cobre es $8,95$ gr/cm^3 y el de la plata es $10,45$ gr/cm^3, determinar qué proporción de plata y cobre contiene. (Peso específico= peso/volumen.)

15. Consideremos el gráfico orientado que une los 5 puntos en el dibujo



Construir una matriz $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ tal que $a_{ij} = 1$ si existe una flecha del vértice i al vértice j que los conecta y $a_{ij} = 0$ en otro caso (en particular, $a_{ii} = 0$ para $i = 1, 2, 3, 4$.
Construir una matriz $B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ tal que b_{ij} = cantidad de caminos formados por 2 flechas, la primera comenzando en el vértice i y la segunda terminando en el vértice j.
Calcular A^2 y entender su relación con B.

16. Supongamos que hay tres grupos de personas, el primero formado por 3 personas, el segundo por 6 y el tercero por 7, y consideremos las siguientes matrices de 'amistad'

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la j-ésima persona del 2do. grupo es amiga} \\ & \text{de la i-ésima persona del 1er. grupo} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$ y

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la j-ésima persona del 3er. grupo es amiga} \\ & \text{de la i-ésima persona del 2do. grupo} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$

i) La matriz

$$C = A.B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

representa en el lugar c_{ij} el número de amigos comunes del segundo grupo que tienen entre sí el j-ésimo integrante del tercer grupo y el i-ésimo integrante del primero. Entienda por qué.

ii) Si el tercer integrante del primer grupo es Ricardo ¿cuáles son todas las personas del tercer grupo que no son amigas de ningún amigo de Ricardo? ¿Cuáles son las personas del segundo grupo amigas de Ricardo?

iii) Si la segunda persona del primer grupo tuviera una enfermedad contagiosa y se la contagiara a sus amigos y éstos a su vez a sus amigos, ¿qué personas del tercer grupo se contagiarían?

iv) Decida si hay alguna persona en el segundo grupo que no tenga amigos en el primero. Decida si hay alguna persona en el segundo grupo que no tenga amigos en el tercero. Decida si hay alguna persona en el tercer grupo sin amigos en el segundo.

17. Se tienen 2 urnas numeradas 1 y 2 con bolillas de dos tipos numeradas 1 y 2 también. Llamamos p_{ij} a la probabilidad de obtener una bolilla j si se extrae al azar una bolilla de la urna i.
Por ejemplo: p_{12} =probabilidad de obtener una bolilla **2** al hacer una extracción de la urna **1**.
Sea $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$, es claro que $p_{11} + p_{12} = 1$ y $p_{21} + p_{22} = 1$.

Sea $P^2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Encontrar la relación entre a_{ij} y p_{kl}.

Probar que P^2 también cumple $a_{11} + a_{12} = 1$, $a_{21} + a_{22} = 1$.
Describir un experimento con dos resultados posibles cuyas probabilidades sean los coeficientes de la primera fila de P^2. Idem con la segunda fila.