Maestría en Estadística

Algebra Lineal

Práctica 2

1. i) Probar que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + 3z = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

ii) Probar que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + 3z = 0;\ -x + y - z = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

iii) Convencerse de que para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, se tiene que

$$\{x \in \mathbb{R}^n / Ax^t = 0\}$$

es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

2. a) Probar que los siguientes son subespacios de $\mathbb{R}^3$

i) $S_1 = \{\lambda(1, 0, -1),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$

ii) $S_2 = \{(\lambda + \mu, \lambda - \mu, 3\lambda + 2\mu),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

iii) $S_3 = \{\lambda(1, 1, 3) + \mu(1, -1, 2),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

b) Probar que $S_1 = \{\lambda(-1, 0, 1),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$
y que $S_2 = S_3 = \{\lambda(2, 0, 5) + \mu(1, -1, 2),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

3. Describir geométricamente los subespacios S y decidir en cada caso si el vector $w \in S$.

i) $S =< (1, 2, 3) >$ $\qquad w = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5})$

ii) $S =< (1, 2, 3)\,,\ (\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}) >$ $\qquad w = (-5, -10, -15)$

4. Hallar tres vectores de $\mathbb{R}^3$ que sean linealmente dependientes y tales que dos cualesquiera de ellos sean linealmente independientes.

5. Decidir si las siguientes sucesiones de vectores son bases de $\mathbb{R}^3$

i) $\{(1, 0, 1),\ (1, 2, 0)\}$

ii) $\{(1, 0, 1),\ (1, 2, 0),\ (1, 0, 1)\}$

iii) $\{(1, 1, 1),\ (0, 1, 1),\ (0, 0, 1)\}$

iv) $\{(\pi, 0, 0),\ (0, \sqrt{2}, 0),\ (0, 0, \sqrt[3]{3})$

v) $\{(1,0,0),\,(0,1,0),\,(0,0,1),\,(1,2,3)\}$

6. Sean en $\mathbb{R}^2$ las siguientes bases:

$$i)\{(1,0),\,(0,1)\}$$

$$ii)\{(1,0),(1,1)\}$$

Hallar las coordenadas en base canónica del vector que en la base $ii)$ tiene coordenadas $(1,0)$ (resp. $(0,1)$).

7. Consideremos las mismas bases que en el ejercicio anterior. Hallar las coordenadas con respecto a las bases dadas de

a) $(1,2)$

b) (x_1,x_2)

Consideremos las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$

i) $\mathcal{B}_1=\{(1,0,0),\,(1,1,0),\,(1,1,1)\}$

ii) $\mathcal{B}_2=\{(0,1,0),\,(0,1,1),\,(1,0,1)\}$

Calcular la matriz de cambio de base $C_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$

8. Hallar bases y dimensión de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$

i) $S=\{x\in\mathbb{R}^3/x_1+2x_2-x_3=0\}$

ii) $T=<(1,1,1),\,(0,-2,0)>$

iii) $S\cap T$

iv) $W=\left\{x\in\mathbb{R}^3/\begin{array}{rcl} x_1-x_2+x_3 & = & 0\\ -x_1+x_2-x_3 & = & 0\end{array}\right\}$

v) $V=\left\{x\in\mathbb{R}^3/\begin{array}{rcl} x_1-x_2+x_3 & = & 0\\ -x_1+x_2+x_3 & = & 0\end{array}\right\}$

9. Consideremos las bases de $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{B}_1=\{(3,5),\,(1,2)\}$$

$$\mathcal{B}_2=\{(1,1),\,(0,1)\}$$

$$\mathcal{B}_3=\{(-2,1),\,(7,-4)\}$$

Hallar $C = C_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}C_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}$ y verificar que $C = C_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_3}$.

10. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f((x_1, x_2)) = (2x_1 - x_2, -8x_1 + 4x_2)$.

i) ¿Cuáles de los siguientes vectores están en $\mathrm{Nu}(f)$?

$$(5, 10), \qquad (3, 2), \qquad (1, 1), \qquad (0, 0)$$

ii) ¿Cuáles de los siguientes vectores están en $\mathrm{Im}(f)$?

$$(1, -4), \qquad (-3, 12), \qquad (5, 0), \qquad (0, 0)$$

iii) Mostrar 4 vectores que pertenezcan a $\mathrm{Im}(f)$.

iv) Mostrar 4 vectores que pertenezcan a $\mathrm{Nu}(f)$.

11. Calcule $\mathrm{Nu}(f)$ y $\mathrm{Im}(f)$ de las siguientes transformaciones lineales

i) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1, 0)$

ii) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$

iii) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$

iv) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (rx_1, rx_2)$ $r = 1, -1, 2, \frac{1}{3}$

v) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(x_1 + x_2))$

vi) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$

Interprete geométricamente cada una de las transformaciones lineales anteriores.

12 Calcular bases de $\mathrm{Nu}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ para las f definidas respectivamente por las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Decidir en cada caso si f es mono, epi y/o isomorfismo.

13. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la t.l. definida por la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular $B = A^{-1}$.

Definamos la t.l. $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ donde $B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Probar que f y g son inversas.