Maestría en Estadística

Algebra Lineal

Práctica 3

1. i) Sean $A = (1, 2, -1)$, $B = (1, -1, 1)$. Hallar $C \neq 0$ tal que $< A, C >=< B, C >= 0$.

ii) Sea $A = (1, -1)$. Hallar B tal que $< A, B >= 0$ y $||A|| = ||B||$.

iii) Sea $A = (-2, 1)$. Hallar todos los vectores $v \in \mathbb{R}^2$ tales que $||v|| = ||A||$ y $< v, A >= 0$.

iv) Sea $A = (0, 0, 2)$. Hallar todos los vectores $v \in \mathbb{R}^3$ tales que $||v|| = ||A||$ y $< v, A >= 0$.

2. Decidir si son o no ciertas las siguientes proposiciones en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$:

i) Si $< A, B >=< A, C >$ y $A \neq 0 \Rightarrow B = C$.

ii) Si $< A, B >= 0, \forall B \Rightarrow A = 0$.

3. i) Sean $v_1 = (1, 2)$ y $v_2 = (-1, 1)$ y $w \in \mathbb{R}^2$ tales que $< v_1, w >= 1$ y $< v_2, w >= 3$. Hallar w.

ii) Sean $z_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ y $z_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Probar que, $\forall w \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $w = < w, z_1 > z_1 + < w, z_2 > z_2$.

4. i) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1); (0, 1, -1); (1, 1, 1)\}$ para obtener una base ortonormal $\mathcal{B}'$.

ii) Calcular las coordenadas de $v = (1, 1, 1)$ y de $w = (1, 0, 0)$ en $\mathcal{B}'$.
Sug: recuerde $< , >$.

iii) Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que contenga una base del plano

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 3x_2 + x_3 = 0\}$$

5. Sea $W =< (3, 4) >$ y p la proyección ortogonal sobre W. Hallar:

i) Una fórmula para $p(x_1, x_2)$.

ii) $[p]_{\mathcal{E}}$.

iii) $W^{\perp}$

iv) Una base ortonormal B tal que $[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. Sean $S = \{(x_1, x_2, x_3)/\, 2x_1 - x_2 = 0\}$ y p la proyección ortogonal sobre S. Hallar:

i) Una base $\mathcal{B}$ ortonormal del subespacio S.

ii) $M \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ la matriz que tiene por columnas a los vectores de $\mathcal{B}$.

iii) Verificar que $[p]_{\mathcal{E}} = M.M^t$.

7. Hallar una base ortonormal y el complemento ortogonal para cada uno de los subespacios que siguen:

i) $S_1 = \{\lambda(1, 2, 1);\ \lambda \in \mathbb{R}\}$

ii) $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3/\, 3x_1 + x_2 = 0\}$

iii) $S_3 = \{x \in \mathbb{R}^2/\, x_1 + 2x_2 = 0\}$

8. Sea $\mathcal{B}'$ la base hallada en el ejercicio **4**. Calcular $Q = C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, siendo $\mathcal{B}$ otra base ortonormal. Verificar que $QQ^t = Id$.

9. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Pruebe que $\mathrm{Nu}(A)$ es ortogonal a $\mathrm{Im}(A)$.

10. Encontrar una tercera columna para que la matriz Q sea ortogonal siendo $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \end{pmatrix}$. ¿Cuántas soluciones hay? Interprete geométricamente.

11. Hallar la recta $y = ax + b$ que ajusta por cuadrados mínimos la tabla y calcular el error $\sum (y_k - (ax_k + b))^2$.

x_k	0	1	-1	2
y_k	1	3	2	4

12. Mismo ejercicio con la siguiente tabla:

x_k	6	4	8	5	3.5
y_k	6.5	4.5	7	5	4

Estimar el valor de y correspondiente a $x = 7.5$.

13. Ajustar una parábola por el método de los cuadrados mínimos de acuerdo a la siguiente tabla:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.1	3.3	3.9	4.4	4.6	4.8	4.6	4.2	3.4

Rta: $y = 0.9433 + 1.3507x - 0.1189x^2$.