Maestría en Estadística

Algebra Lineal

Práctica 4

1. Hallar el determinante de A usando triangulación.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ con $\det A = 8$. Calcular $\det(3A)$ y $\det(-A)$.

3. Si A y A^{-1} tienen sus coeficientes enteros, ¿por qué ambos determinantes deben dar 1 ó -1 ?

4. Demostrar, sin calcular, que los siguientes determinantes son nulos.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x & y & 2x+3y \\ 4 & 3 & 17 \\ z & t & 2z+3t \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} sen^2 a & 1 & cos^2 a \\ sen^2 b & 1 & cos^2 b \\ sen^2 c & 1 & cos^2 c \end{vmatrix}$$

5. Calcular el rango de las matrices del ejercicio anterior.

6. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que A es inversible y en esos casos hallar la inversa.

7. Sea $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Probar que A es una matriz ortogonal (interpretar geométricamente) y calcular det (A).

8. ¿Cuánto vale el determinante de una matriz ortogonal? ¿Cuál es el rango?

9. Hallar $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ortogonal con det $(A) = -1$.

10. *Regla de Cramer en* 2×2 Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con det $(A) = ad - bc \neq 0$. Probar que la solución del sistema $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ es $x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{vmatrix}}{\det(A)}$ y $x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & b_1 \\ c & b_2 \end{vmatrix}}{\det(A)}$.

11. Demostrar que las raíces de la ecuación det $\begin{pmatrix} x - a & b \\ b & x - c \end{pmatrix} = 0$ son reales.

12. Encontrar un ejemplo de 4×4 en el que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \neq \det A . \det D - \det B . \det C$$

donde A, B, C, D son matrices de 2×2.

13. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$. Probar, usando cofactores, que A^{-1} también es triangular superior.

14. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$. ¿Para qué valores de $x_1, \ldots, x_n$ el rango de A es, respectivamente, $0, 1, 2, 3$?

15. i) Calcular el rango de $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

¿Cuánto vale el determinante de A?

ii) Si $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$ con $x, y \in \mathbb{R}^3$ no nulos, ¿cuál es el rango de A?