Maestría en Estadística

Algebra Lineal

Práctica 5

1. Encontrar los autovalores y autovectores de A y verificar que, si U es la matriz cuyas columnas forman una base de autovectores, $U^{-1}AU = D$ donde D tiene los autovalores en la diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Probar que: $\lambda = 0$ es autovalor de $A \Leftrightarrow A$ es singular.

3. Demuestre que los autovalores de una matriz triangular superior (o inferior) T son T_{ii}.

4. Supongamos que en cierta especie hay una epidemia en la que cada mes se enferma la mitad de los que están sanos y muere la cuarta parte de los que están enfermos.

i) Si la distribución original es de ningún enfermo y 10000 sanos, calcular el número de enfermos en el n-ésimo mes.

ii) Llamemos x_k al número de muertos en el k- ésimo mes, y_k al número de enfermos en el k-ésimo mes y z_k al número de sanos en el K-ésimo mes. Encontrar $A \subset \mathbb{R}^{3\times 3}$ que describa el proceso, o sea

$$A \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix}.$$

Probar que cualquiera sea la distribución original (x_0, y_0, z_0), (x_k, y_k, z_k) tiende a un múltiplo de $(1, 0, 0)$ (si puede, encuéntrelo en función de (x_0, y_0, z_0)), es decir mueren todos (lo cual es obvio ya que se enferman o se mueren pero ni se curan ni nacen nuevos individuos en el modelo).

5. Si A tiene autovalor λ, demuestre que:

i) λ es autovalor de A^t

ii) la matriz kA tiene autovalor $k\lambda$

iii) la matriz A^r tiene autovalor λ^r, $r \in \mathbb{N}$

iv) si A es no singular, $1/\lambda$ es autovalor de A^{-1}

v) $A + kI$ tiene autovalor $\lambda + k$

vi) $\lambda^2 + \lambda$ es autovalor de $A^2 + A$.

6. Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ encontrar 2 matrices distintas S y $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ inversibles tales que $D = S^{-1}AS$ y $D' = T^{-1}AT$ sean diagonales.¿Vale $D = D'$?

7. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ con autovalores $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{5}$. Probar que $A^n \longrightarrow 0$ (es decir:$(A^n)_{ij} \longrightarrow 0$, $\forall i, j = 1, 2, 3$).

8. Sea $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que para toda fila A_i, la suma de sus componentes es igual a 1. Probar que 1 es autovalor de A y encontrar un autovector correspondiente.

9. Dar un ejemplo para mostrar que los autovalores pueden alterarse cuando se sustrae de una fila un múltiplo de otra.

10.

i) $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular los autovalores λ_1, λ_2 y verificar que:
$\lambda_1 + \lambda_2 =$Tr $A = 1/2$ y que $\lambda_1.\lambda_2 =$det $A = -1/2$.

ii) Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es una matriz de probabilidad (sus columnas suman 1) y $\lambda_1 \geq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ son sus autovalores, probar que $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 \leq 1$.