Maestría en Estadística
Álgebra Lineal
Práctica 6

1. Encontrar una descomposición en valores singulares de las siguientes matrices y calcular sus normas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad B = (-4 \quad 12 \quad 3)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Demostrar que el rango de $A \in \mathbb{R}^{p \times q}$ es la cantidad de valores singulares no nulos de A (contados con su multiplicidad). Verificar la afirmación anterior para las matrices de 1.

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1,000001 \end{pmatrix}$

i) Hallar la solución exacta de $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2,000001 \end{pmatrix}$.

ii) Hallar la solución exacta de $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

iii) Comparar la diferencia de las dos soluciones obtenidas con la diferencia entre los vectores $\begin{pmatrix} 2 \\ 2,000001 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

iv) Idem para $A = \begin{pmatrix} 10^{-8} & 0 \\ 0 & 10^{-8} \end{pmatrix}$, $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^{-6} \\ 10^{-6} \end{pmatrix}$.

4. Dada $A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

i) Hallar la solución exacta de $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b$.

ii) Si se triangula el sistema restando a la segunda ecuación $\frac{1}{10^{-4}} = 10^4$ veces la primera, queda:

$$\begin{cases} 10^{-4}x + y & = & 1 \\ -9999y & = & -9998 \end{cases}$$

Si se redondea el valor de $y = \frac{9998}{9999}$ despejado de la segunda ecuación por $\tilde{y} = 1$, despejar el valor correspondiente $\tilde{x}$ de la primera ecuación. Comparar los valores de $\tilde{x}$ y $\tilde{y}$ así obtenidos con la solución exacta del sistema.

iii) Si se invierten las filas antes de triangular y, del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

se triangula restando a la segunda ecuación $\frac{1}{10^4} = 10^{-4}$ veces la primera queda:

$$\begin{cases} x + y & = & 2 \\ 0.9999y & = & 0.9998 \end{cases}$$

Si se redondea el valor de $y = \frac{0.9998}{0.9999} = \frac{9998}{9999}$ por $\tilde{y} = 1$ despejar el valor de $\tilde{x}$ para que se satisfaga la primera ecuación. Comparar los valores de $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ así obtenidos con la solución exacta del sistema.

Nota: Este ejercicio pretende ejemplificar lo siguiente: el sistema triangulado como en ii) es más estable por redondeos o pequeños errores. En general, dividir por números pequeños para triangular (el 10^{-4} en el procedimiento i)) introduce inestabilidad de la solución.

5. Considerar para las siguientes matrices el sistema $Ax = b$. Hallar Δb tal que, si se resuelve el sistema $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$, el error relativo de la solución sea lo máximo posible. Idem para el mínimo.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Sean:

$$A = \begin{pmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 4.11 \\ 9.7 \end{pmatrix}$$

Hallar las soluciones de $Ax = b$, $Ax = c$. Comparar. ¿Qué pasa? Calcular $\text{cond}(A)$.

7. Considerar el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 0.89x_1 + 0.53x_2 & = & 0.36 \\ 0.47x_1 + 0.28x_2 & = & 0.19 \end{cases}$$

que tiene la solución exacta $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

- i) Encuentre Δb tal que si se sustituye el lado derecho b por $b + \Delta b$, la solución exacta sea $x_1 = 0.47$, $x_2 = -0.11$

ii) ¿Está el sistema bien o mal condicionado?

8. Sea A_n la matriz de 2×2 definida:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 + \frac{1}{n^2} \end{pmatrix}$$

i) Hallar la inversa y la condición de A_n .

ii) Sea $n = 100$ y sea $b = (1, 2 - \frac{1}{n^2})$. Resolver $A_{100}x_t = b$ en forma exacta. Sea x_c dado por $x_c = (1, 0)$. Hallar $r = A_{100}x_c - b$ y verificar la cota de error

$$\|x_c - x_t\|_\infty \leq \|A^{-1}\|_\infty \|r\|_\infty.$$

9. Sea D_n la matriz diagonal que tiene 0.1 en cada lugar de la diagonal. Calcular el determinante y la condición. Notar que para n grande, el determinante de D_n es prácticamente cero... ¿Significa esto que la matriz es 'casi singular'? ¿ D_n está mal condicionada?