ÁLGEBRA LINEAL

Práctica N°1: Espacios Vectoriales

Ejercicio 1.

i) Representar gráficamente en el plano los siguientes vectores:

$$(-1,1)\,; \quad (2,3)\,; \quad (-1,1)+(2,3)\,; \quad \frac{1}{2}.(-1,1)+\frac{3}{2}.(2,3)$$

ii) Sean $v, w \in \mathbb{R}^2$. Interpretar geométricamente $-v\,, \quad 3.v\,, \quad \frac{1}{3}.v\,, \quad v+w\,, \quad v-w.$

iii) Sean $v = (3,1)\,, \quad w = (2,4) \in \mathbb{R}^2$. Representar gráficamente los conjuntos:

$S_1 = \{r.v / r \in \mathbb{R}\}$

$S_2 = \{r.v / r \in \mathbb{R}_{\geq 1}\}$

$S_3 = \{r.v + s.w / r, s \in \mathbb{R}\}$

$S_4 = \{r.v + s.w / r, s \in \mathbb{R}\,,\ 0 \leq r, s \leq 1\}$

$S_5 = \{r.v + s.w / r, s \in \mathbb{R}\,,\ 0 \leq r, s \leq 1, r+s=1\}$

Ejercicio 2. Probar en cada caso que el conjunto V con la suma y el producto por escalares definidos es un espacio vectorial sobre K.

i) $\mathrm{V} = \mathrm{K}^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, ..., a_n, ...) / a_i \in \mathrm{K}\ \forall i \in \mathbb{N}\}$, el conjunto de todas las sucesiones de elementos de K (donde K es un cuerpo cualquiera)

$+ : (a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}}\ .\ : k.(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (k.a_i)_{i\in\mathbb{N}}$

ii) X es un conjunto, $\mathrm{V} = \mathcal{P}(\mathrm{X})$, $\mathrm{K} = \mathbb{Z}_2$

$+ : B + C = B \triangle C\ .\ : 0.B = \emptyset \quad , \quad 1.B = B$

iii) $\mathrm{V} = \mathbb{R}_{>0}$, $\mathrm{K} = \mathbb{Q}$. $\oplus : a \oplus b = a.b\ \otimes : \frac{m}{n} \otimes a = \sqrt[n]{a^m}$

Ejercicio 3. Sea V un espacio vectorial sobre K, $k \in \mathrm{K}$, $v \in \mathrm{V}$. Probar las siguientes afirmaciones:

i) $0.v = \vec{0}$

ii) $k.\vec{0} = \vec{0}$

iii) $(-1).v = -v$

iv) $-(-v) = v$

v) $k.v = \vec{0} \Rightarrow k = 0$ ó $v = \vec{0}$

iv) $-\vec{0} = \vec{0}$

Ejercicio 4.

i) Sea $v \in \mathbb{R}^2$ un vector fijo. Se define la función $f_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de la siguiente forma:

$$f_v(x, y) = (x, y) + v$$

Interpretar geométricamente el efecto de f_v sobre el plano (f_v se llama la traslación en v).

ii) Probar que $\mathbb{R}^2$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma $+_{(2,1)}$ y el producto por escalares $\cdot_{(2,1)}$ definidos de la siguiente forma:

$(x, y) +_{(2,1)} (x', y') = (x + x' - 2, y + y' - 1)$ $r.\cdot_{(2,1)}(x, y) = r.(x - 2, y - 1) + (2, 1)$ (Este espacio se notará $\mathbb{R}^2_{(2,1)}$ para distinguirlo de $\mathbb{R}^2$ con la suma y el producto usual. La notación se basa en que el $(2, 1)$ resulta el neutro de la suma $+_{(2,1)}$).

iii) Interpretar geométricamente $+_{(2,1)}$ y $\cdot_{(2,1)}$, teniendo en cuenta que: $(x, y) +_{(2,1)} (x', y') = f_{(2,1)}(f_{(-2,-1)}(x, y) + f_{(-2,-1)}(x', y'))$ $r.\cdot_{(2,1)}(x, y) = f_{(2,1)}(r.f_{(-2,-1)}(x, y))$

Ejercicio 5. Sea $\mathrm{S} = \{f \in \mathbb{R}[X] / f(1) = f(2)\}$

i) Verificar que la suma usual de polinomios es una operación en S (es decir: $f, g \in \mathrm{S} \Rightarrow f + g \in \mathrm{S}$)

ii) Verificar que el producto usual de un número real por un polinomio es una acción de $\mathbb{R}$ en S (es decir: $r \in \mathbb{R}, f \in \mathrm{S} \Rightarrow r.f \in \mathrm{S}$)

iii) Probar que (S,+,.) es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. (Si se minimiza el trabajo sólo deberá verificarse una propiedad para esto. Comparar i), ii) y iii) con el criterio para decidir si un subconjunto es un subespacio.)

Ejercicio 6. Caracterizar geométricamente todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 7.

i) Encontrar un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^2$ que sea cerrado para la suma y para la resta pero no para la multiplicación por escalares.

ii) Encontrar un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^2$ que sea cerrado para la multiplicación por escalares pero no para la suma.

Ejercicio 8. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios de V como K-espacio vectorial:

i) $\mathrm{S}_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 / v = a.(1, 0, 0) + b.(1, 1, 1)\,;\, a, b \in \mathbb{R}\}$ $\quad \mathrm{V} = \mathbb{R}^3 \quad \mathrm{K} = \mathbb{R}$

ii) Sean $\{a_{ij}\}_{1 \le i,j \le 3} \in \mathbb{R}$ fijos. $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3 \quad \mathrm{K} = \mathbb{R}$

$$\mathrm{S}_2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 & = & 0 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 & = & 0 \\ a_{31}.x_1 + a_{32}.x_2 + a_{33}.x_3 & = & 0 \end{array} \right. \right\}$$

iii) $S_3 = \{a.i / a \in \mathbb{R}\}$ $\quad V = \mathbb{C}$ $\quad K = \mathbb{R}$ ó $K = \mathbb{C}$

iv) $S_4 = \{f \in K[X] / f'(1) = 0\}$ $\quad V = K[X]$

v) $S_5 = \{f \in K[X] / f = 0 \text{ ó } \mathrm{gr} f \geq 2\}$ $\quad V = K[X]$

vi) $S_6 = \{f \in K[X] / f = 0 \text{ ó } \mathrm{gr} f \leq 5\}$ $\quad V = K[X]$

vii) $S_7 = \{M \in K^{n\times n} / M^t = -M\}$ $\quad V = K^{n\times n}$

viii) $S_8 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) / f'' + 3f' = 0\}$ $\quad V = C^\infty(\mathbb{R})$ $\quad K =$

ix) $S_9 = \{v \in \mathbb{R}^2_{(2,1)} / x + y = 3\}$ $\quad V = \mathbb{R}^2_{(2,1)}$ $\quad K = \mathbb{R}$

x) $S_{10} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} / a_1 = 0\}$ $\quad V = K^{\mathbb{N}}$

xi) $S_{11} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} / \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_r = 0\ \forall\, r \geq k\}$ $\quad V = K^{\mathbb{N}}$

xii) $S_{12} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} / a_1.a_2 = 0\}$ $\quad V = K^{\mathbb{N}}$

Ejercicio 9.

i) Encontrar subespacios S y T de $\mathbb{R}^2$ tales que $S \cup T$ no sea subespacio.

ii) Sean S y T subespacios de un K-espacio vectorial V. Probar que $S \cup T$ es un subespacio de V $\iff$ $S \subseteq T$ ó $T \subseteq S$.

Ejercicio 10. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes espacios vectoriales sobre K

i) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$, $K = \mathbb{R}$

ii) K^n

iii) $K_n[X] = \{f \in K[X] / f = 0 \text{ ó } \mathrm{gr}(f) \leq n\}$

iv) $K[X]$

v) $K^{n\times n}$

vi) $\mathbb{C}^{n\times n}$, $K = \mathbb{R}$

vii) $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$, $K = \mathbb{Z}_2$

Ejercicio 11. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas

i) Sea V un K-espacio vectorial y sean $v, w \in V$, $k \in K$.
Entonces $< v , w > = < v , w + k.v >$

ii) Sean $v_1, v_2, v_3, v_4, w \in \mathbb{R}^7$ tales que $< v_1 , v_2 , w > = < v_3 , v_4 , w >$.
Entonces $< v_1 , v_2 > = < v_3 , v_4 >$

iii) Sea V un K-espacio vectorial y sean $v_1, \ldots, v_n, w \in V$.
$< v_1 , \ldots , v_n , w > = < v_1 , \ldots , v_n > \iff w \in < v_1 , \ldots , v_n >$

Ejercicio 12. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales: (K= $\mathbb{R}$)

$$\text{i)}\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2-2x_3+x_4 &=& 0\\ 3x_1-2x_2+x_3+5x_4 &=& 0\\ x_1-x_2+x_3+2x_4 &=& 0\end{array}\right. \qquad \text{ii)}\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2-2x_3+x_4 &=& -2\\ 3x_1-2x_2+x_3+5x_4 &=& 3\\ x_1-x_2+x_3+2x_4 &=& 2\end{array}\right.$$

$$\text{iii)}\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3-2x_4+x_5 &=& 1\\ x_1-3x_2+x_3+x_4+x_5 &=& 0\\ 3x_1-5x_2+3x_3+3x_5 &=& 0\end{array}\right. \qquad \text{iv)}\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3+x_4 &=& 2\\ x_1+3x_2+2x_3+4x_4 &=& 0\\ 2x_1+x_3-x_4 &=& 6\end{array}\right.$$

¿Cambia algo si K = $\mathbb{Q}$? ¿Y si K = $\mathbb{C}$?

Ejercicio 13.

i) Resolver los siguientes sistemas y comparar los conjuntos de soluciones (K= $\mathbb{R}$)

(a)

$$\{x+2y-3z=4$$

(b)

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-3z &=& 4\\ x+3y+z &=& 11\end{array}\right.$$

(c)

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-3z &=& 4\\ x+3y+z &=& 11\\ 2x+5y-4z &=& 13\end{array}\right.$$

ii) Interpretar geométricamente los conjuntos de soluciones obtenidos.

Ejercicio 14. Resolver los siguientes sistemas no homogéneos. Considerar en cada uno de ellos el sistema homogéneo asociado ($A.x=0$).

$$\text{i)}\left\{\begin{array}{rcl} x_1-x_2+x_3 &=& 2\\ -x_1+2x_2+x_3 &=& -1\\ -x_1+4x_2+5x_3 &=& 1\end{array}\right. \qquad \text{ii)}\left\{\begin{array}{rcl} x_1-x_2+x_3 &=& 1\\ -x_1+2x_2+x_3 &=& 1\\ -x_1+4x_2+5x_3 &=& 4\end{array}\right.$$

$$\text{iii)}\left\{\begin{array}{rcl} x_1-x_2-x_3 &=& 2\\ 2x_1+x_2-2x_3 &=& 1\\ x_1+4x_2+x_3 &=& 1\end{array}\right. \qquad \text{iv)}\left\{\begin{array}{rcl} x_1-x_2-x_3 &=& \alpha\\ 2x_1+x_2-2x_3 &=& \beta\\ x_1+4x_2+x_3 &=& \gamma\\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R} && \end{array}\right.$$

Ejercicio 15. Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1-x_2+x_3 &=& \alpha_1\\ 3x_1+x_2+4x_3 &=& \alpha_2\\ -x_1+3x_2+2x_3 &=& \alpha_3\end{array}\right.$$

Determinar los valores de α_1,α_2,α_3 $\in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema admite solución.

Ejercicio 16. Resolver según los valores de a y b en $\mathbb{R}$

$$\text{i)} \left\{ \begin{array}{rcl} (5-a)x_1 - 2x_2 - x_3 & = & 1 \\ -2x_1 + (2-a)x_2 - 2x_3 & = & 2 \\ -x_1 - 2x_2 + (5-a)x_3 & = & b \end{array} \right. \qquad \text{ii)} \left\{ \begin{array}{rcl} ax + y + z & = & 1 \\ x + ay + z & = & a \\ x + y + az & = & a^2 \end{array} \right.$$

Ejercicio 17. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para que cada uno de los siguientes sistemas tenga solución única

$$\text{i)} \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + kx_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + kx_2 + kx_3 & = & 0 \end{array} \right. \qquad \text{ii)} \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + (k-1)x_2 & = & 0 \\ x_1 + (3k-4)x_2 + kx_3 & = & 0 \\ x_1 + (k-1)x_2 + \frac{k}{2}x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Ejercicio 18. Determinar los números reales k para los cuales el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} kx_1 + x_2 & = & 0 \\ x_1 + kx_2 & = & 0 \\ k^3x_1 + x_2 + k^3x_3 + kx_4 & = & 0 \\ x_1 + k^2x_2 + kx_3 + kx_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

tiene alguna solución no trivial y, para esos k, resolverlo.

Ejercicio 19. Determinar para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ cada uno de los siguientes sistemas tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones

$$\text{i)} \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + kx_2 - x_3 & = & 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 & = & -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 & = & 2 \end{array} \right. \qquad \text{ii)} \left\{ \begin{array}{rcl} kx_1 + 2x_2 + kx_3 & = & 1 \\ kx_1 + (k+4)x_2 + 3kx_3 & = & -2 \\ -kx_1 - 2x_2 + x_3 & = & 1 \\ (k+2)x_2 + (3k+1)x_3 & = & -1 \end{array} \right.$$

Ejercicio 20.

i) Resolver el siguiente sistema en $\mathbb{C}^2$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (1-i)x_1 - ix_2 & = & 0 \\ 2x_1 + (1-i)x_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

ii) Resolver en $\mathbb{C}^3$ el sistema $A.x = 0$ donde

$$A = \begin{pmatrix} i & -(1+i) & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2i & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 21. Resolver los siguientes sistemas:

i) en $\mathbb{Z}_5$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 4 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 & = & 2 \\ 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = & 1 \end{array} \right.$$

ii) en $\mathbb{Z}_7$

$$\begin{cases} x+z &= 2 \\ 2y+z &= 6 \\ x+3y &= 0 \end{cases}$$

iii) en $\mathbb{Z}_3$

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ 2x+y+2z &= 0 \\ x+z &= 2 \end{cases}$$

Ejercicio 22. Encontrar un sistema a coeficientes reales cuya solución general sea:

$$(1,1,0)+\lambda(1,2,1) \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 23. Sea $A \in \mathrm{K}^{m\times n}$, $\quad \in \mathrm{K}^{m\times 1}$.

i) Si el sistema $A.x = 0$ tiene solución única, probar que el sistema $A.x = b$ tiene a lo sumo una solución. Dar ejemplos de los distintos casos que se puedan presentar.

ii) ¿Vale la recíproca de i)?

Ejercicio 24. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes espacios vectoriales sobre K

i) $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y-z=0 \ ; \ x-y=0\}$, $\mathrm{K}=\mathbb{R}$

ii) $S_2 = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_7)^3 \,/\, \begin{cases} x+z=0 \\ 2y+z=0 \\ x+3y=0 \end{cases}\right\}$, $\mathrm{K}=\mathbb{Z}_7$

iii) $S_3 = \{A \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \,/\, A = -A^t\}$, $\mathrm{K}=\mathbb{Q}$

iv) $S_4 = \{f \in \mathbb{R}_4[\mathrm{X}] \,/\, f(1)=0 \text{ y } f(2)=f(3)\}$, $\mathrm{K}=\mathbb{R}$

v) $S_5 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, a_i = 0 \ \forall i \geq 5\,;\ a_1+2a_2-a_3=0\,;\ a_2+a_4=0\}$, $\mathrm{K}=\mathbb{R}$

vi) $S_6 = \{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \,/\, f''' = 0\}$, $\mathrm{K}=\mathbb{R}$

Ejercicio 25. Sea V un K-espacio vectorial y sean $v_1\,,\, v_2\,,\, v_3 \in$ V. Probar que si $v_1+3v_2-v_3 = 0 = 2v_1-v_2-v_3$ entonces $< v_1\,,\, v_2\,,\, v_3 >=< v_3 >$

Ejercicio 26. Determinar si $v \in S$ en cada uno de los siguientes casos

i) $v=(1,2,-1)$, $S =< (1,3,2)\,,\,(2,0,1)\,,\,(1,1,1) > \subseteq \mathbb{R}^3$

ii) $v=(1,0,-1,3)$, $S =< (1,0,1,0)\,,\,(2,1,0,1)\,,\,(0,1,0,-2) > \subseteq \mathbb{R}^4$

Ejercicio 27. Sea $S =< (1,-1,2,1),(3,1,0,-1),(1,1,-1,-1) > \subseteq \mathbb{R}^4$.

i) Determinar si $(2,1,3,5) \in S$

ii) Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 / x_1-x_2-x_3=0\} \subseteq S$

iii) Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1-x_2-x_3=0\}$

Ejercicio 28. Hallar un sistema de generadores para $S \cap T$ como subespacio de V en cada uno de los siguientes casos

i) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z)/3.x - 2.y + z = 0\}$ $\quad T = \{(x, y, z)/x + z = 0\}$

ii) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z)/3.x - 2.y + z = 0\}$ $\quad T =< (1, 1, 0), (5, 7, 3) >$

iii) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$, $S =< (1, 1, 3), (1, 3, 5), (6, 12, 24) >$ $\quad T =< (1, 1, 0), (3, 2, 1) >$

iv) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^{3\times 3}$, $S = \{(x_{ij})/x_{ij} = x_{ji}\, \forall\, i, j\}$ $\quad T = \{(x_{ij})/x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0\}$

v) $\mathrm{V} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]/f(1) = 0\}$ $\quad T =< 1\,,\, \mathrm{X}\,,\, \mathrm{X}^2\,,\, \mathrm{X}^3 + 2\mathrm{X}^2 - \mathrm{X}\,,\, \mathrm{X}^5 >$

vi) $\mathrm{V} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]/f(1) = 0\}$ $\quad T = \{f \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]/f'(1) = f''(1) = 0\}$

Ejercicio 29. Decidir si las siguientes sucesiones de vectores son linealmente indepen- dientes sobre K

i) $(1 - X)^3\,,\, (1 - X)^2\,,\, 1 - X\,,\, 1$ en K[X]

ii) $(1, 2, 3)\,,\, (2, 3, 1)\,,\, (1, 1, 4)\,,\, (5, 1, 1)$ en $\mathbb{R}^3$

iii) $(1, 4, -1, 3)\,,\, (2, 1, -3, -1)\,,\, (0, 2, 1, -5)$ en $\mathbb{Q}^4$

iv) $(1 - i, i)\,,\, (2, -1 + i)$ en $\mathbb{C}^2$ para $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ y $\mathrm{K} = \mathbb{C}$

v) $(3 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})\,,\, (7, 1 + 2\sqrt{2})$ en $\mathbb{R}^2$ para $\mathrm{K} = \mathbb{Q}$ y $\mathrm{K} = \mathbb{R}$.

vi) $f(x) = 1\,,\, g(x) = x$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

vii) $f(x) = \mathrm{sen}(x)\,,\, g(x) = \cos(x)$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

viii) $f(x) = e^x\,,\, g(x) = x$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

ix) $u = (1, 0, 1, 0, 1, ...)\,,\, v = (0, 1, 0, 1, 0, ...)\,,\, w = (1, 1, 0, 1, 1, 0, ...)$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Ejercicio 30. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $\{v_1\,,\, v_2\,,\, v_3\} \subset \mathrm{V}$ es un conjunto linealmente independiente en los siguientes casos:

i) $\{(1, 2, k)\,,\, (1, 1, 1)\,,\, (0, 1, 1 - k)\} \subset \mathbb{R}^3$

ii) $\{(k, 1, 0)\,,\, (3, -1, 2)\,,\, (k, 2, -2)\} \subset \mathbb{R}^3$

iii) $\{k.X^2 + X\,,\, X^2 - k\,,\, k^2.X\} \subset \mathbb{R}[X]$

iv) $\{ \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \,,\, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix} \,,\, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$

Ejercicio 31. Sean $v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$. Probar que $\{v_1, ..., v_n\}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R} \Longleftrightarrow \{v_1, ..., v_n\}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$.

Ejercicio 32. Sea V un K-espacio vectorial. Probar

i) $\{v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n\} \subseteq$ V son l. i. $\iff$ $\{v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_n\} \subseteq$ V son l. i.

ii) $\lambda \in$ K, $\lambda \neq 0$ $\{v_1, ..., v_i, ..., v_n\} \subseteq$ V son l. i. $\iff$ $\{v_1, ..., \lambda v_i, ..., v_n\} \subseteq$ V son l. i.

iii) $\lambda \in$ K $\{v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n\} \subseteq$ V son l. i. $\iff$ $\{v_1, ..., v_i + \lambda v_j, ..., v_j, ..., v_n\} \subseteq$ V son l.i.

Notar que i), ii) y iii) justifica el "método de triangulación" para analizar la dependencia o independencia lineal de vectores en K^n.

Ejercicio 33. En cada uno de los siguientes casos hallar una base del subespacio de soluciones del sistema lineal homogéneo $A.x = 0$ (K = $\mathbb{R}$)

i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ iii) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 34. Completar los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del K-espacio vectorial V indicado

i) $\{(1,1,1,1)\,,\,(0,2,1,1)\}$, V = $\mathbb{R}^4$, K = $\mathbb{R}$

ii) $\{X^3 - 2X + 1\,,\,X^3 + 3X\}$, V = $\mathbb{R}_3$[X] , K = $\mathbb{R}$

iii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, V = $\mathbb{C}^{2\times 2}$, K = $\mathbb{R}$ y K = $\mathbb{C}$

Ejercicio 35. Extraer una base de S de cada uno de los siguientes sistemas de generadores

i) S $=< (1,1,2)\,,\,(1,3,5)\,,\,(1,1,4)\,,\,(5,1,1) > \subseteq \mathbb{R}^3$, K = $\mathbb{R}$

ii) S $=< X^2 + 2X + 1\,,\,X^2 + 3X + 1\,,\,X + 2 > \subseteq \mathbb{R}$[X] , K = $\mathbb{R}$

iii) S $= \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}$, K = $\mathbb{R}$ y K = $\mathbb{C}$

Ejercicio 36.

i) Sea B $= \{f_0, f_1, f_2, ..., f_n, ...\}$ donde cada f_i es un polinomio de grado exactamente i. Probar que B es una base de K[X].

ii) ¿Es $\{(1,0,0,0,0,...)\,;\,(0,1,0,0,0,...)\,;\,(0,0,1,0,0,...)\,;\,(0,0,0,1,0,...)\,;...\}$ una base de $\mathrm{K}^{\mathbb{N}}$?

Ejercicio 37. Hallar una base y la dimensión de los siguientes K-espacios vectoriales

i) $< (1,4,-2,1)\,,\,(1,-3,-1,2)\,,\,(3,-8,-2,7) > \subseteq \mathbb{R}^4$, K = $\mathbb{R}$

ii) $\langle \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{Q}^{2\times 2}$, K = $\mathbb{Q}$

iii) $\mathbb{C}$, K = $\mathbb{R}$ y K = $\mathbb{C}$

iv) $\{f \in \mathbb{R}[X] \,/\, f = 0$ ó $\mathrm{gr}(f) \leq 3$ y $f(2) = f(-1)\}$, K = $\mathbb{R}$

v) $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$, $\mathrm{K} = \mathbb{Z}_2$

vi) $\{f \in \mathbb{Q}[X] \,/\, f = 0$ ó $\mathrm{gr}(f) \leq 3$ y $(x^2-2)/f\}$, $\mathrm{K} = \mathbb{Q}$

vii) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{K}^{\mathbb{N}} \,/\, a_i = a_j \ \forall\, i,j\,\}$

Ejercicio 38. Hallar la dimensión del $\mathbb{R}$-espacio vectorial S para cada $k \in \mathbb{R}$ en los siguientes casos

i) $S =< (1,k,1)\,,\,(-1,k,1)\,,\,(0,1,k) >$

ii) $S = \{x \in \mathbb{R}^3/A.x = 0\}$ siendo $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz, $A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 39. Hallar todos los $b \in \mathbb{R}$ para los cuales el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de soluciones del sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 + (b-6)x_2 + 5bx_3 = 0 \\ x_1 + (b-2)x_2 + (b^2+4b)x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + bx_3 = 0 \end{cases}$$

i) tenga dimensión 1.

ii) tenga dimensión 2.

Ejercicio 40. Sean S y T los subespacios de $\mathbb{R}^4$. $S =< (1,2,1,0),(2,1,0,1) >$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^4/x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0\}$. Hallar un subespacio U de $\mathbb{R}^4$ tal que dim $U = 2$ y $S \cap T \subset U \subset T$.

Ejercicio 41. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$< (-2,1,6),(3,0,-8) > = < (1,k,2k),(-1,-1,k^2-2),(1,1,k) >$$

(*) Ejercicio 42. Se considera el $\mathbb{Q}$-espacio vectorial V $\subset \mathbb{R}$ generado por los vectores $\{1\,,\,\sqrt{2}\,,\,\sqrt{3}\,,\,\sqrt{6}\}$

i) Utilizando un argumento de dimensión probar que existe un polinomio $f \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ con $\mathrm{gr}(f) \leq 4$ que se anula en el punto $\psi = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Hallar un tal f.

ii) Calcular $\dim_{\mathbb{Q}}\mathrm{V}$

Ejercicio 43. En cada uno de los siguientes casos caracterizar $S + T \subseteq \mathrm{V}$ y determinar si la suma es directa.

i) $\mathrm{V} = \mathrm{K}^{n\times n}$, $S = \{A \in \mathrm{K}^{n\times n} \,/\, A_{ij} = A_{ji} \ \forall i,j\,\}$, $T = \{A \in \mathrm{K}^{n\times n} \,/\, A_{ij} = -A_{ji} \ \forall i,j\,\}$

ii) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$, $S =< (1,1,1) >$, $T =< (2,-1,1),(3,0,2) >$

iii) $\mathrm{V} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \,/\, f = 0$ ó $\mathrm{gr}(f) \leq 3\}$, $T = \{f \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \,/\, \mathrm{mult}(4,f) \geq 4\}$

iv) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^{2\times 3}$, $S = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 3} \,/\, A_{11} + A_{21} = 0\ ,\ 3A_{22} - 2A_{11} = A_{13} + A_{23}\}$,

$T = \langle \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \ ,\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rangle$

Ejercicio 44. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $S \cap T =< (0,1,1) >$, siendo $S = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$, $\qquad T =< (1,k,2), (-1,2,k) >$

Ejercicio 45. Para cada S dado hallar T $\subseteq$ V tal que S $\oplus$ T = V (en este caso T se dice un *suplemento* de S con respecto a V)

i) S $=< (1,2,-1,3)\,,(2,3,-2,1)\,,(0,1,0,7) >$, V $= \mathbb{R}^4$

ii) S $= \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} /\ \mathrm{tr}(A) = 0\}$, V $= \mathbb{R}^{n\times n}$

iii) S $=< 3, 1+X^2 >$, V $= \mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$

Ejercicio 46. Dado S $= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 + 2x_4 = 0\,,\, x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$, hallar dos vectores $v_3\,,\, v_4$ de $\mathbb{R}^4$ tales que para toda elección de una base $\{v_1\,,\, v_2\}$ de S, $\{v_1\,,\, v_2\,,\, v_3\,,\, v_4\}$ sea una base de $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 47. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar

i) S, T subespacios de $\mathbb{R}^3$, dim S = dim T = 2 $\Rightarrow \exists v \neq 0$ tal que $v \in$ S $\cap$ T

ii) S, T, W subespacios de $\mathbb{R}^{11}$, dim S = dim T = dim W = 4 $\Rightarrow$ dim (S $\cap$ T $\cap$ W) ≥ 1

Ejercicio 48. Sea V un K-espacio vectorial y sean S , T y U subespacios de V.

i) Probar que $(S \cap T) + (S \cap U) \subseteq S \cap (T + U)$.

ii) Mostrar que, en general, la inclusión anterior es estricta.

iii) Probar que, si $U \subseteq S$, entonces vale la igualdad en i).

Ejercicio 49. Sean S , T y U subespacios de un K-espacio vectorial V tales que

i) $S \cap T = S \cap U$

ii) $S + T = S + U$

iii) $T \subseteq U$ Probar que $T = U$.

Ejercicio 50. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y T un hiperplano de V (es decir, un subespacio de dimensión $n-1$)

i) Probar que $\forall\, v \notin$ T , T $\oplus < v >=$ V

ii) Si S es un subespacio de V tal que S $\not\subseteq$ T, probar que S + T = V. Calcular dim (S $\cap$ T)

iii) Si S y T son dos hiperplanos distintos, deducir dim (S $\cap$ T)

Ejercicio 51. Sea V $= \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

i) Sean $S = \{f \in \mathrm{V} \,/\, f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$ y $T = \{f \in \mathrm{V} \,/\, f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$ (S es el conjunto de funciones pares y T el conjunto de funciones impares). Probar que S y T son subespacios de V y que $S \oplus T =$ V.

ii) Sea $U = \{f \in \mathrm{V} \,/\, f(0) = 0\}$ y $W = \{f \in \mathrm{V} \,/\, f$ es constante$\}$. Probar que U y W son subespacios de V y que $U \oplus W =$ V.

(*) Ejercicio 52.

i) Sea $S = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}\,\}$. Probar que S es un subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Calcular su dimensión.

ii) Encontrar una base de S formada por sucesiones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que, $\forall n \in \mathbb{N}$, verifiquen $u_n = u^{n-1}$ para algún $u \in \mathbb{R}$.

iii) Usando ii), encontrar una fórmula para el término general de la sucesión de Fibonacci:

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \forall\, n \geq 1 \end{cases}$$