ÁLGEBRA LINEAL

Práctica N°10: Endomorfismos en espacios vectoriales con producto interno

En esta práctica, todos los espacios vectoriales considerados serán sobre $\mathbb{R}$ o sobre $\mathbb{C}$.

Ejercicio 1.

i) Sea en $\mathbb{R}^3$ el producto interno $\langle\, , \,\rangle$ definido en la base canónica por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y sea $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ definida por $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 3.x_1 - 2.x_2 - 3.x_3$. Hallar $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x) = \langle x, v\rangle \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^3$.

ii) Se considera en $\mathbb{C}^{3\times 3}$ el producto interno definido por $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}\,(A.B^*)$.

Sea $f : \mathbb{C}^{3\times 3} \to \mathbb{C}$ la transformación lineal definida por $f(A) = (1, i, 1)A \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$.

Hallar $C \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tal que $f(A) = \langle A, C\rangle \quad \forall\, A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

iii) Se considera en $\mathbb{R}_3[X]$ el producto interno definido por $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x).q(x)dx$.
Sea $\varphi \in (\mathbb{R}_3[X])^*$ definida por $\varphi(p) = p(5)$.
Hallar $g \in \mathbb{R}_3[X]$ tal que $\varphi(p) = \langle p, g\rangle \quad \forall\, p \in \mathbb{R}_3[X]$.

Ejercicio 2. Calcular f^* para cada una de las transformaciones lineales siguientes:

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad f(x_1, x_2) = (3.x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$

ii) $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $\quad f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + (1-i)x_2, x_2 + (3+2i)x_3, x_1 + ix_2 + x_3)$

iii) $B = \{(1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$, $\quad f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

iv) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $\quad f(p) = p'$ $\quad$ (donde $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x).q(x)dx$).

v) $P \in GL(n, \mathbb{C})$, $f : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$, $f(A) = P^{-1}.A.P$ $\quad$ (donde $\langle A, B\rangle = tr(A.B^*)$).

vi) $\mu_f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $\mu_f(p) = f.p$ donde $f \in \mathbb{R}[X]$ y $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x).q(x)dx$

Ejercicio 3. Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita. Sean f_1 y f_2 endomorfismos de V y sea k un escalar. Probar

i) $(f_1 + f_2)^* = f_1^* + f_2^*$

ii) $(k.f_1)^* = \overline{k}.f_1^*$

iii) $(f_1 \circ f_2)^* = (f_2)^* \circ (f_1)^*$

iv) Si f_1 es un isomorfismo, entonces f_1^* es un isomorfismo y $(f_1^*)^{-1} = (f_1^{-1})^*$

v) $((f_1)^*)^* = f_1$

vi) $f_1^* \circ f_1 = 0 \Rightarrow f_1 = 0$

Ejercicio 4. Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una tranformación lineal. Probar que $\mathrm{Im}(f^*) = (\mathrm{Nu}\ (f))^\perp$.

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-x - 3y - 2z, 4x + 6y + 2z, -3x - 3y)$$

Hallar un producto interno $<, >: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que f sea autoadjunta para $<, >$.

Ejercicio 6. Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y S un subespacio de V. Probar que la proyección ortogonal $P : V \to V$ sobre S es autoadjunta. Calcular sus autovalores.

Ejercicio 7.

i) En cada uno de los siguientes casos, encontrar una matriz $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal tal que $O.A.O^t$ sea diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

ii) En cada uno de los siguientes casos, encontrar una matriz $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria tal que $U.A.U^*$ sea diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & i & 0 \\ 1 & 3 & 2i & 1 \\ -i & -2i & 3 & i \\ 0 & 1 & -i & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8. Encontrar una base ortonormal B de $\mathbb{R}^2$ tales que $|f|_B$ y $|g|_B$ sean diagonales si las matrices de f y de g en la base canónica son:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Sugerencia: ver el ejercicio 33 de la práctica 6.

Definición: Se dice que f es **normal** si $f \circ f^* = f^* \circ f$.

Ejercicio 9. Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal.

i) Probar que si f admite una base ortonormal de autovectores, entonces f es normal.

ii) Probar que si f es normal valen las siguientes afirmaciones:

  a) $||f(v)|| = ||f^*(v)|| \quad \forall\, v \in V$. En particular $Nu f = Nu f^*$.
  b) $\forall \lambda \in \mathbb{C},\ f - \lambda I$ es normal.
  c) Sea v un autovector de f de autovalor λ. Entonces v es un autovector de f^* de autovalor $\overline{\lambda}$.
  d) $E_\lambda = \{v \in V \ / \ f(v) = \lambda.v\}$ es f^*-invariante.

iii) Probar que si f es normal, entonces admite una base ortonormal de autovectores.
(Sugerencia: observar que $(E_\lambda)^\perp$ es f-invariante y f^*-invariante).

iv) Deducir de lo anterior que las matrices unitarias son diagonalizables sobre $\mathbb{C}$. Encontrar un ejemplo de matriz ortogonal que **no** sea diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio 10. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$.

ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, simetría respecto de la recta de ecuación $x_1 - x_2 = 0$

iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, simetría respecto del plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$

iv) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ y eje $< (1, 0, 1) >$.

Ejercicio 11.

i) Construir una rotación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(M_1) = M_2$ en cada uno de los siguientes casos:

  a) $M_1 = \{(1, 2, -1)\} \quad ; \quad M_2 = \{(-1, 2, 1)\}$
  b) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \,/\, x_1 - x_2 = 2 \,;\, x_3 = 1\}$
  $M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \,/\, x_1 - 2.x_2 = 1 \,;\, 3.x_2 - x_3 = -4\}$
  c) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \,/\, x_1 - x_2 + x_3 = 3\}$
  $M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \,/\, x_1 - x_2 + x_3 = -3\}$

ii) Encontrar M_1 y M_2 variedades lineales de $\mathbb{R}^3$ de igual dimensión tales que no haya ninguna rotación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla $f(M_1) = M_2$.

Ejercicio 12. Sean en $\mathbb{R}^3$ los planos Π_1 y Π_2 definidos por las ecuaciones:

$$\Pi_1 : x_2 - x_3 = 1 \qquad \text{y} \qquad \Pi_2 : x_2 + x_3 = -1$$

Definir una transformación ortogonal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(\Pi_1) = \Pi_2$ y $f(\Pi_2) = \Pi_1$.

Ejercicio 13. Sea $k \in \mathbb{R}$ y sean Π_1 y Π_2 los planos en $\mathbb{R}^3$ definidos por

$$\Pi_1 = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 - x_2 + 2x_3 = k\}$$

$$\Pi_2 =< (1,0,1), (0,1,2) > +(1,-1,1)$$

Determinar k para que exista una simetría $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(\Pi_1) = \Pi_2$. Para ese valor de k hallar dicha simetría y calcular $f(\Pi_2)$.

Ejercicio 14. Dada la tranformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

decidir si f es una rotación, una simetría o una composición de una rotación y una simetría. Encontrar la rotación, la simetría o ambas.

Ejercicio 15. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$|f| = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

i) Probar que f es una rotación.

ii) Hallar $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ g = f$.

(*) Ejercicio 16. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se llama isometría si verifica que

$$d(x,y) = d(f(x), f(y)) \qquad \forall\, x\,,\ y\ \in \mathbb{R}^2$$

i) Probar que si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una isometría tal que $f(0) = 0$, f resulta una transformación lineal y además f es ortogonal.

ii) Deducir que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una isometría si y sólo si existen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transformación ortogonal y $A \in \mathbb{R}^2$ tales que $f(x) = g(x) + A$, $\forall\, x \in\ \mathbb{R}^2$